

課題研究P4 実験セミ第2回

No1

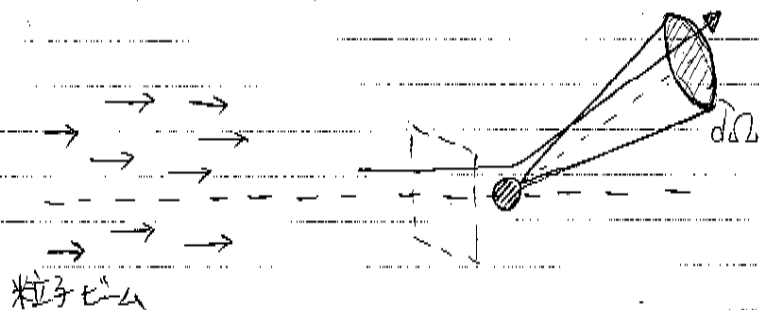
2. Passage of Radiation Through Matter

④馬場

2.1. Preliminary Notions and Definitions

2.1.1 The Cross Section.

2つの粒子の衝突や相互作用を扱う場合、散乱断面積を用いる。



F : フラックス... 単位時間単位面積あたりに入射する粒子数。

$d\Omega$: 固定した立体角 ← ここに散乱される単位時間あたりの粒子数を見る。

ランダム性から計測ごとに値は変動するが、

計測数を増やすことにより、その平均がある値

$\frac{dN_s}{d\Omega}$ に近づく。 N_s : 単位時間あたりに散乱された粒子数。

フラックス F を入射したときに単位時間あたりに $d\Omega$ に散乱される粒子数とし、微分散乱断面積を定義

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(E, \Omega) = \frac{1}{F} \frac{dN_s}{d\Omega} \quad (2.1)$$

量子力学での単粒子を考える際は、粒子数のかわりに

確率の流れとして上式を用いる。

$d\sigma$ の次元は面積... 視覚的にはビームを狙撃する障壁ととらえる。

No. 2

全立体角で積分すると、

$$\sigma(E) = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (2.2)$$

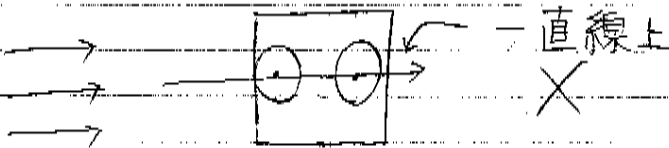
実際には、標的は平板で、多くの散乱中心をもつ。

平均でどれだけ相互作用が起きているのかを知りたい。

標的の散乱中心が一様分布と仮定。

平板が十分薄いと仮定

散乱中心がビームから見て直線上に重ならない程度



中心の密度を N 、平板の厚さを δx とすると、

ビームから見て垂直面に単平面当り $N\delta x$ の中心がある。

- ビームが標的の面積よりも広いとき、

標的の全垂直面積を A とおき、

固定角 $d\Omega$ に散乱される粒子数 $N_s(\Omega) (= \frac{dN_s}{d\Omega})$ は、

$$N_s(\Omega) = FAN\delta x \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (2.3)$$

全立体角で積分して、

$$N_{tot} = FAN\delta x \sigma$$

- ビームが標的より小さいとき、

ビームが覆う標的の面積を A とおけばいい。

量子学的での単粒子も先程と同様に考えると、

$$(\text{薄さ } \delta x \text{ の標的において散乱する確率}) = N \alpha \delta x \quad (2.5)$$

2.1.2

上の確率の考え方をを用いて、任意の厚さ x のときを考える。

排反事象を用いる。

↓ 生存確率

x 進んで "相互作用をしていない確率": $P(x)$

$x \sim x+dx$ の間で "相互作用する確率": $w dx$

これらを用いて、

$$P(x+dx) = P(x) (1 - w dx)$$

$$P(x) + \frac{dP(x)}{dx} dx$$

$$\therefore -dP = -w P dx \Rightarrow P = C \exp(-wx) \quad C: \text{定数}$$

$$P(0) = 1 \text{ より } C = 1$$

$$\therefore P = \exp(-wx) \quad \text{--- ①}$$

よって、相互作用する確率 P_{int} は、

$$P_{int}(x) = 1 - \exp(-wx) \quad (2.7)$$

x まで "生き残り dx の" 相互作用する確率: $F(x) dx$

$$F(x) dx = P(x) \cdot w dx = \exp(-wx) w dx$$

平均自由行程 λ $\leftarrow \frac{1}{w} \int e^{-wx} dx$

$$\lambda = \frac{\int x P(x) dx}{\int P(x) dx} = \frac{\int x e^{-wx} dx}{\int e^{-wx} dx} = \frac{1}{w} \quad (2.9)$$

No. 4

 x が十分に小さいとき

$$P_{int} = 1 - e^{-\frac{\delta x}{\lambda}} = 1 - \left(1 - \frac{\delta x}{\lambda} + \dots\right) \approx \frac{\delta x}{\lambda} \quad (2.10)$$

これを (2.5) と比較して

$$\lambda = \frac{1}{Na} \quad (2.11)$$

$$P(x) = \exp(-Na x)$$

$$P_{int}(x) = 1 - \exp(-Na x)$$

$$F(x) dx = \exp(-Na x) \cdot Na dx$$

2.1.3

 ρ : 質量密度, t : 厚さ

$$\text{mass thickness} = \rho \cdot t$$

 α -ゲート試料の目安になる。

2.2 Energy Loss of Heavy Charged Particles by Atomic Collisions

物質を通過した荷電粒子を調べると、以下が特徴的に表われる。

- ① 粒子のエネルギー欠損
- ② 入射軌道からの方向のずれ

↑
これらは2つの過程

- 1) 原子中の電子との非弾性衝突
- 2) 原子核との弾性散乱

が何度も起こった累積の結果として説明できる。

それ以外に

3) チェレンコフ放射 — 光の衝撃波 等

4) 核反応

5) 制動放射

今回は無視

以下、簡単のため、荷電粒子を下の2つに分ける。

(1) e^- or e^+

(2) 電子より重い粒子 ... α 陽子, μ 粒子, π 粒子, ρ 粒子

No. 6

エネルギー損失のほとんどは非弾性衝突のほう。

一回の衝突で失われるエネルギーは小さいが、高密度だと衝突が多く、薄い標的でもたまたまエネルギー損失が見られる。

(例) 10 MeV の p は 0.25 mm の銅で全運動エネルギーを失う。

これもまた2つに分けられる。

Soft collisions: 電子の準位が励起するだけ。

hard collisions: 原子がイオン化するほどエネルギー大。

↑ 中には飛出した電子が連鎖的にイオン化を起こすものもある。

δ線や107オン電子

弾性散乱も↑ほどではないがよく起こる。

たいていは原子核の質量が入射粒子の質量より大きいので、エネルギー移行は小さい。

例外 α 線 ^4He → 水素原子 ^1H

このときでもエネルギー損失のメインは電子衝突。

電子衝突は量子力学的確率で起こるが、数が多いので、

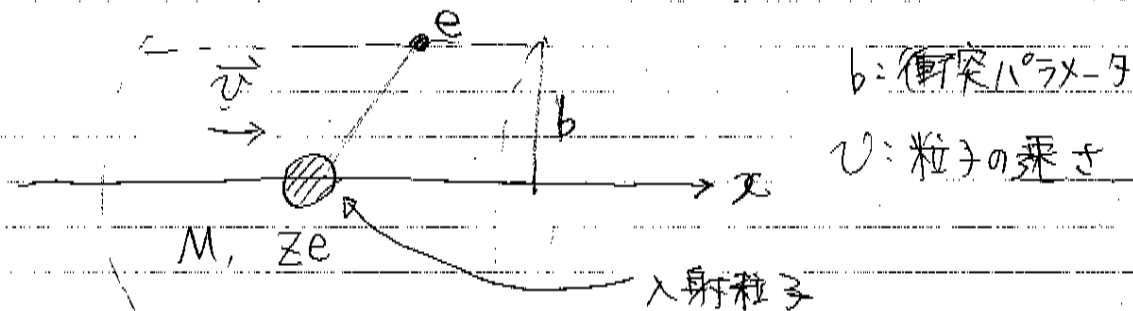
揺らぎは小さく、平均値をとればよい。

単位経路あたりのエネルギー損失を阻止能という。

また、シアンルは $\frac{dE}{dx}$ と呼ばれ、Bohrに古典的に計算され、

その後 Bethe, Blochらによって量子力学的に計算された。

2.2.1 Bohr's Calculation.



上図のような 質量 M , 電荷 Ze の重い粒子と電子との衝突を考える。

$M \gg m_e$ (電子質量) なので、衝突において粒子は軌道を変えないとする。

$$I = \int F dt = e \int E_{\perp} dt = e \int E_{\perp} \frac{dt}{dx} dx = e \int E_{\perp} \frac{dx}{v} \quad (2.16)$$

力積 対称性より、軌道に垂直な電場のみ有効

ガウスの法則より、

$$\int E_{\perp} 2\pi b dx = 4\pi Ze \quad \int E_{\perp} dx = \frac{2Ze}{b} \quad (2.17)$$

$$\therefore I = \frac{2Ze^2}{bv} \quad (2.18)$$

よって、エネルギー変化は、

$$\Delta E(b) = \frac{I^2}{2m_e} = \frac{2Z^2e^4}{m_e v^2 b^2} \quad (2.19)$$

No. 8

N_e = 電子密度 $b \sim b+db$ にあた電子に与えたエネルギーは.

$$-dE(b) = \Delta E(b) N_e dV \quad (dV = 2\pi b dx)$$

$$= \frac{4\pi Z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \frac{db}{b} dx \quad (2.20)$$

b で積分する.

積分範囲を $b = [0, \infty]$ でとると不適.

半径が大きいと衝突時間が長く、計算が無効になる
→ 後述

小さすぎると $\Delta E(b) \rightarrow \infty$ となってしまう ((2.19) 参照)

従って、ある極限 $b = [b_{\min}, b_{\max}]$ で積分.

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi Z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}} \quad (2.21)$$

$b_{\min}$ を決める.

古典的に最大のエネルギーを伝播するのは正面衝突



エネルギー and 運動量保存則.

$$v' = \frac{M - m_e}{M + m_e} v \simeq v, \quad v_e = \frac{2M}{M + m_e} v \simeq 2v \quad (M \gg m_e)$$

電子は運動エネルギー $\frac{1}{2} m_e (2v)^2$ を得る.

相対論では $v \rightarrow \gamma v$

$$\frac{1}{2} m_e (2v)^2 \rightarrow 2\gamma^2 m_e v^2$$

エネルギー変化の式 (2.19) を用いて、

$$\frac{2Ze^4}{Me v^2 b_{\min}^2} = 2\gamma^2 m v^2 \quad \therefore b_{\min} = \frac{Ze^2}{\gamma Me v^2} \quad (2.22)$$

• $b_{\max}$ を求める。

原子中の電子 ... 角周波数 ν で束縛されている。

電子がエネルギーを吸収するためには、作用時間が $\tau = \frac{1}{\nu}$ より短くないといけない。

衝突時間が長いと断熱になり、エネルギーが移らない。

断熱不変量、

作用変数 $J = \oint p dx$ 同期運動系で不変、

?

条件... 変化がゆくり、同期運動が経路する程度

$\Rightarrow \tau$ 以上の時間が長いと断熱変化、

作用時間 $\tau \sim \frac{b}{v} \Rightarrow \frac{b}{\gamma v}$ 平均周波数 $\bar{\nu}$ を用いて、

$$\frac{b}{\gamma v} \leq \tau = \frac{1}{\bar{\nu}} \quad \therefore b_{\max} = \frac{\gamma v}{\bar{\nu}} \quad (2.24)$$

$$\therefore -\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi Ze^4}{Me v^2} Ne \ln \left(\frac{\gamma^2 m v^3}{Ze^2 \bar{\nu}} \right) \quad (2.25)$$

α 粒子や重い原子核で有効

軽い粒子 ... 量子的効果が強いになる。

No. 0

2.2.2. The Bethe-Bloch Formula

量子力学的に計算

衝突パラメータではなく運動量変化を用いた。

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_A r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 \right] \quad (2.26)$$

the Bethe-Bloch 公式

補正: 密度効果 δ と殻補正 C

$$-\delta - 2\frac{C}{Z}$$

 W_{max} : 1 衝突で得られる最大エネルギー正面衝突時 $\approx 2m_e c^2 \beta \gamma^2$ r_e : 古典電子半径 m_e : 電子質量 N_A : アボガドロ定数 I : 平均励起ポテンシャル Z : 標的物質の原子番号 A : 標的物質の質量数 z : 入射粒子の電荷

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

殻と密度の効果

・密度効果

粒子が作る電場によって原子が分極

分極電場において、軌道から遠い電子と相互作用

エネルギー損失が大きくなる。

エネルギーが大きくなると効果大 ← 衝突半径が大きくなるため

さらに、物質の密度が大きくなると効果が大きくなる。

→ Fig 2.3

$$\delta = \begin{cases} 0 & X < X_0 \\ 4.6052X + C_0 + a(X_1 - X)^m & X_0 < X < X_1 \\ 4.6092X + C_0 & X > X_1 \end{cases}$$

$X = \log_{10}(\beta\gamma)$, X_0, X_1, C_0 : 物質依存

$$C_0 = - \left(2 \ln \frac{I}{h\nu_p} + 1 \right)$$

$$\nu_p = \sqrt{\frac{N_e e^2}{\pi m_p}} = \sqrt{80.617 \times 10^6 \text{ cm}^{-3} N_e} \text{ Hz} \quad \text{プラズマ固有振数}$$

$$N_e = N_A \rho Z/A$$

殻効果

入射粒子の速さが電子の角速度程度かそれ以下のとき、

電子が動かないという前提が成り立たない。

効果は小さい。