課題研究P4　実験ゼミ　　　担当　古野（P.37〜P.48）　　1

2011. 5. 2

2.4 Energy Loss of Electrons and Positrons

今までは Ze の原子核のエネルギー損失を考えてきたが、電子、陽電子も物質中でエネルギーを損失する。

原子核では主に
1). 物質中の電子による非弾性散乱
2) 物質中の原子核との弾性散乱
を考えたが、電子、陽電子の場合は、これらに加えて 制動放射 の効果が加わる

電子が加速度を持つ時に現れる

エネルギーが 10 MeV 程度になると、制動放射の効果は 1)、2) と同程度になる

電子の全エネルギー損失はこれらの和になる：

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{tot} = \underbrace{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad}}_{\text{制動放射}} + \underbrace{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{coll}}_{\text{散乱}} \qquad (2.65)$$

2.4.1 Collision Loss

散乱によるエネルギー損失の計算は Bethe − Bloch の公式を修正して行う

修正が必要な理由

① Bethe − Bloch の公式を導く際、粒子の軌道は一定とした。しかし、電子は軽いので、軌道も変える。

② 電子−電子の散乱は同種粒子によるもの ⇒ 量子統計性も加えないとダメ。

修正した後の Bethe − Bloch の公式は、　（修正前は式 (2.27)）

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \underbrace{\frac{1}{\beta^2}\left[\log\frac{\tau^2(\tau+1)}{2(I/m_e c^2)} + F(\tau)\right.}_{\text{修正}} \left. - \delta - 2\frac{C}{Z}\right] \qquad (2.66)$$

τ：電子のエネルギー（$m_e c^2$ を単位とした）

2.4.2 Energy Loss by Radiation : Bremsstrahlung

制動放射の断面積は質量の2乗に反比例。（$\sigma \propto \frac{1}{m^2}$）

よって 電子 (511 keV) と ミューオン（電子の次に軽い粒子で 106 MeV）を比べると、電子の方が 40000 倍以上も断面積が大きい

→ GeV 程度までだと、実質、電子のみが制動放射を起こすと考えてよい

制動放射の大きさは，電子の感じる電場（つまり加速度）に依る．
→ 原子の遮蔽効果も重要な因子となる．

$$\xi \equiv \frac{100\, m_e c^2 h\nu}{E_0 E Z^{\frac{1}{3}}} \qquad (2,67)$$ でパラメータ付けされる．

E_0 ： はじめの電子の全エネルギー
E ： 終状態の電子の全エネルギー
$h\nu$ ： 放射される光子のエネルギー $(= E_0 - E)$

完全に遮蔽される ： $\xi \simeq 0$
全く遮蔽されない ： $\xi \gg 1$

数 MeV 以上のエネルギーでの，制動放射の断面積は

$$d\sigma = 4Z^2 r_e^2 \alpha \frac{d\nu}{\nu}\left\{(1+\varepsilon^2)\left[\frac{\phi_1(\xi)}{4} - \frac{1}{3}\log Z - f(Z)\right] - \frac{2}{3}\varepsilon\left[\frac{\phi_2(\xi)}{4} - \frac{1}{3}\log Z - f(Z)\right]\right\} \qquad (2,68)$$

$\varepsilon \equiv \frac{E}{E_0}$
α ： 微細構造定数 $\left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137}\right)$
$f(Z)$ ： クーロン補正 ⇒ 式 (2,70)
ϕ_1, ϕ_2 ： 遮蔽関数 ⇒ 実験から求めると 式(2,69) になる．

放射による，単位長さ当たりのエネルギー損失は

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = N\int_0^{\nu_0} h\nu \frac{d\sigma}{d\nu}(E_0, \nu)\, d\nu \qquad (2,73)$$

$$\equiv N E_0 \Phi_{rad} \qquad (2,74)$$

式 (2,68) より $\frac{d\sigma}{d\nu}$ は だいたい $\frac{1}{\nu}$ に比例

→ 式 (2,73) は ν に依らず，物質の性質のみに依存

散乱によるエネルギー損失 ： $\propto \log E_0$
制動放射 〃 ： $\propto E_0$
⇒ 図 2,10

※ 単一エネルギーの電子ビームのエネルギー損失は大きなゆらぎを持つ

2.4.3 Electron - Electron Bremsstrahlung

原子核－電子 の制動放射： Z^2 に依存
電子 －電子 の制動放射： Z に依存

合計の断面積は 式(2.68) の Z^2 を $Z^2+Z=Z(Z+1)$ に置き変えればよい.

2.4.4 Critical Energy

臨界エネルギー E_c ： 散乱によるエネルギー損失と制動放射による損失が等しくなる時の入射エネルギー．物質ごとに異なる（表2.2）

$$E_c \simeq \frac{800}{Z+1.2}\ \mathrm{MeV} \qquad (2.78)$$ で近似される.

2.4.5 Radiation Length

放射長：制動放射によってエネルギーが元の $\frac{1}{e}$ 倍になるまでの長さ

$$L_{rad} \simeq \frac{716.4\,\mathrm{g/cm^2}\ A}{Z(Z+1)\log\left(\frac{287}{\sqrt{Z}}\right)} \qquad (2.82)$$

で近似される （ヘリウム以外で 2.5% 以内の精度）

化合物，混合物の場合は 質量比を重みとした和となる

$$\frac{1}{L_{rad}} = w_1\left(\frac{1}{L_{rad}}\right)_1 + w_2\left(\frac{1}{L_{rad}}\right)_2 + \cdots \qquad (2.84)$$

2.4.6 Range of Electrons

電子のエネルギー損失は．入射エネルギー，物質の性質に大きく依存
→ 図2.11，2.12

2.4.7 The Absorption of β Electrons

β線の強度は距離の指数関数で減少（∵β線のエネルギーが連続スペクトル） 図2.13

$$I = I_0 \exp(-\mu x) \qquad (2.85)$$ で表せる.

μ ： β吸収係数 （β線の最大エネルギーに依存）
この性質を利用すると．β線の最大エネルギーや物質の厚みを計測できる.

2.5 Multiple Coulomb Scattering

荷電粒子は物質中を通過する際、原子核との弾性散乱を繰り返し受ける。
ただし、反応確率は小さい。
この反応の微分断面積は（1回の散乱ならば）Rutherford の公式で与えられる：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Z_2^2 Z_1^2 r_e^2 \frac{(m_e c / \beta p)^2}{4\sin^4 \frac{\Omega}{2}} \qquad (2.86)$$

原子核の方が十分重い時、1回1回の散乱角は小さいが、それが何回も起こり、
軌道はジグザグになる。

物質中のクーロン散乱に対する扱いは以下の3つに分けられる

1) single scattering：物質が十分薄くて、2回以上散乱が起こる確率が十分小さい時。
微分断面積はちょうど式(2.86)になる。

2) plusal scattering：散乱回数が2〜20回までの時。1)のような扱いも統計的な扱いも出来なくて、最も難しい

3) multiple scattering：散乱回数が20を越える時。統計的な計算から正味の散乱角(図2.14)が求められる。3つの中で最もよく用いられる

以下では3)について考える。

散乱角が30°までで有効な分布関数の式は（$\beta < 0.05$ の電子は除く）

$$P(\theta)d\Omega = \eta d\eta \left(2\exp(-\eta^2) + \frac{F_1(\eta)}{B} + \frac{F_2(\eta)}{B^2} + \cdots \right) \qquad (2.87)$$

各パラメータについては45ページを参照（物質、入射粒子の情報を反映）

$P(\theta)$ のグラフは図2.15のようになる。
- 散乱角が小さい時は、ガウス関数が良い近似
- 散乱角が大きいところでは $\frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}$ の形になる

↑ 1回だけ大きな散乱角を得た

2.5.1 Multiple Scattering in the Gaussian Approximation

散乱角が小さい時（$< 10^\circ$）のみを考えると、散乱確率は

$$P(\theta) \simeq \frac{2\theta}{\langle\theta^2\rangle} \exp\left(\frac{-\theta^2}{\langle\theta^2\rangle}\right) d\theta \qquad (2.88)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\langle\theta^2\rangle}{2}}$$

$\langle\theta^2\rangle$: rms と呼ばれていて、式(2.89)のように計算される

式(2.89)は $0.9 < 0.995$, $10 < \Omega < 10^8$ で 2% 以内の精度

物質が密になっている程、$\langle\theta^2\rangle$ は大きい

軌道を含む平面に射影した角度に対する分布関数が便利な時もある ⇒ 式(2.90)

軌道の横方向のずれも存在し、その分布関数は

$$P(r)\,dr = \frac{6r}{\langle\theta^2\rangle t^2} \exp\left(-\frac{-3r^2}{\langle\theta^2\rangle t^2}\right) dr \qquad (2.91)$$

$$t \equiv \frac{x}{L_{rad}} \qquad \text{（物質の厚さを表す）}$$

$$\langle r^2\rangle = \frac{\langle\theta^2\rangle t^2}{3} \qquad (2.92)$$

をみたす。

L_{rad} が現れるのはたまたま。

2.5.2 Backscattering of Low-Energy Electrons

電子は質量が小さく、クーロン散乱の影響を受けやすい

→ 物質内で大きな散乱角を得て、はね返ってくることがある。（図 2.16）

エネルギーが低く、Z が大きく、入射角が浅い程 確率が大きい。

入射電子に対する、後方散乱の割合 ： アルベド と呼ばれる。

β線検出器では重要な値 （図 2.17）

例えば、NaI 検出器では 80% 近くの電子が後方散乱を受ける。