

4. 統計と実験データの取り扱い

統計は科学に不可欠なもので、測定データの不確かさをも扱うために使われている。この本では、統計のすべてをカバーできないので、原子核物理や素粒子物理に関連がある所だけに限定する。

4.1 確率分布の特徴

ランダムな過程は、確率密度 $P(x)$ (x は確率変数) で表せる。

例えば、サイコロでは $P(x) = 1/6$ ($x=1 \sim 6$) となる。 x が離散型のとき $P(x)$ で x となる頻度も表し、 x が連続型のときは $P(x)dx$ で $x \sim x+dx$ となる頻度も表す。

4.1.1 累積分布

累積分布

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} P(x) dx & \text{連続} & (4.1) \\ \sum_{i=1}^2 P(x_i) & \text{離散} & (4.2) \end{cases}$$

また、全体の累積分布は 1.1 になり、 $P(x_i)$ や $\int P(x)dx$ は 0 以上 1 以下となる。

4.1.2 期待値

期待値

$$E[x] = \begin{cases} \int x P(x) dx & \text{連続} & (4.5) \\ \sum_i x_i P(x_i) & \text{離散} & (4.6) \end{cases}$$

また、 $E[f(x)]$ なども表えることが出来る。

ここからは x は連続とする。

4.1.3 モーメント、平均と分散

確率分布はモーメントによって特徴づけられる。

x_0 まわりの r 次のモーメント

$$E[(x-x_0)^r] = \int (x-x_0)^r P(x) dx$$

平均：原点まわりの1次のモーメント

$$\mu = \int x P(x) dx \quad (4.8)$$

分散： μ まわりの2次のモーメント

$$\sigma^2 = \int (x-\mu)^2 P(x) dx \quad (4.9)$$

分散のルート σ は、標準偏差と呼ばれて、分布の幅を表している。また、3次のモーメントも考えることもできて、これは skewness (歪度) と呼ばれる。分布の対称度合を表しているが、あまり使われることはない。

4.1.4 共分散

今までは1変数の分布を考えてきたけれど、今度は多変数の分布を考える。

共分散

$$\text{Cov}(x, y) = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)] \quad (4.10)$$

共分散は2変数の間の1次の相関を表す。

相関係数

$$\rho = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (4.11)$$

相関係数は $-1 \sim 1$ の値で、 $|\rho| = 1$ なら完全に比例していて、 $|\rho| = 0$ なら独立している。

4.2 よくある確率分布

物理で出てくるたいたいの分布は、2項分布、ポアソン分布、ガウス分布で表せる。この節ではこれらの分布もザッと見る。

4.2.1 2項分布

YES と NO のような2つの可能性があるとき、片方が起る確率は2項分布になる。

2項分布

$$P(r) = \frac{N!}{r!(N-r)!} p^r (1-p)^{N-r} \quad (4.12)$$

$$\mu = Np \quad (4.13)$$

$$\sigma^2 = Np(1-p) \quad (4.14)$$

N が大きく、 p が小さくなければ、2項分布はガウス分布になる。たいたい $N \geq 30$, $p \geq 0.05$, < 0.5 でガウス分布が使える。また、 p が小さいとポアソン分布になる。

4.2.2 ポアソン分布

2項分布で $\mu = Np$ を保って $p \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ とすればポアソン分布になる。

ポアソン分布

$$P(r) = \frac{\mu^r e^{-\mu}}{r!} \quad (4.16)$$

$$\sigma^2 = \mu \quad (4.18)$$

^{137}Cs の崩壊

半減期 27年 $\rightarrow \lambda = \ln 2 / 27 [\text{year}^{-1}] = 8.2 \times 10^{-10} [\text{s}^{-1}]$

^{137}Cs 1 μg $\rightarrow$ 原子核 10^{15} 個

よって $\mu = Np = 8.2 \times 10^5 [\text{崩壊/s}]$

これを (4.16) に代入すると $P(r)$ が得られる。

(4.16) も見るに N や p は必要ではなく μ があればいいことが分かる。なので

1秒間あたり1回イベントが起こる確率が知りたいときは $\mu = \lambda t$

(λ は1秒あたりの崩壊数) として、

$$P(r) = \frac{(\lambda t)^r e^{-\lambda t}}{r!} \quad (4.17)$$

を計算すればよい。

ポアソン分布は図4.2のように左右対称ではないが、 $\mu \geq 20$ くらいになると、左右対称に近づき、ガウス分布になってくる。

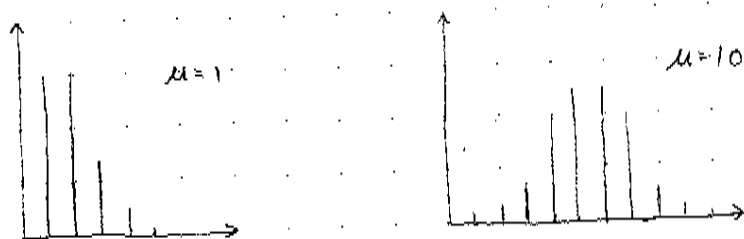


図 4.2.

4.2.3 ガウス分布 (正規分布)

ガウス分布は、科学の至る所で見られる。

ガウシアン

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.19)$$

σ はだいたいいくど-7の60%くらい^{FWHM}の所の半幅を表している。

FWHM は μ -7の半分の所の全幅を表している。

$$\text{FWHM} = 2.35 \cdot \sigma$$

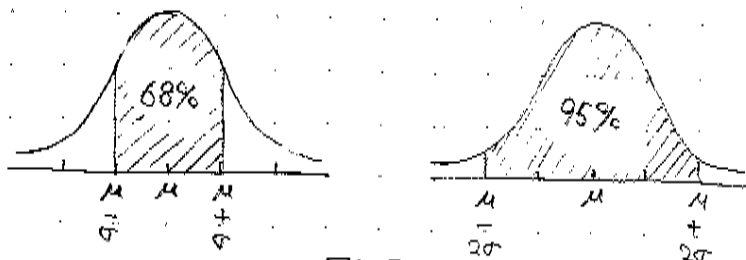
ガウシアン^{の積分}は解析的に解けないので、数値的に解くことになる。

標準正規分布 ($\mu=0, \sigma^2=1$) についての表があるので、それを見て答えを出せる。標準でないときは、

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

で標準になおして考える。

また、ガウス分布では、図4.5のように結果が $x \pm \sigma$ となるのは68%、 $x \pm 2\sigma$ となるのは95%になる。



4.2.4 カイ2乗分布

実験データに対する理論式のfitの良さを見るのに、カイ2乗分布が使われる。

カイ2乗

1点での実験データと理論式との相違を測る

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (4.22)$$

この値が理論から与えられる

カイ2乗分布

$$P(u) du = \frac{(u/2)^{(v/2)-1} \exp(-u/2)}{2 \Gamma(v/2)} du \quad v: \text{自由度} \quad (4.23)$$

$$\mu = v$$

$$(4.24)$$

$$\sigma^2 = 2v$$

カイ2乗分布が何なのか見る。(4.22)を見るとカイ2乗は、測定値と理論平均の差を分散で割ったもので、これはデータの変動を表している。この分布の有用性は、仮説のテストに使えることにある。測定値と仮説理論平均のカイ2乗によって、これらの間のずれの妥当性の手法を得ることができる。もし、超えりそうになり、カイ2乗の値が得られたら、理論パラメータを疑い始めなければならぬ。

測定値は真値を中心とした χ^2 の分散で正規分布する。

このとき、 χ^2 が与えられる。

4.3 測定誤差と測定方法

どんな実験でも不確かさや誤差が付きまとう。まずは、系統誤差と偶然誤差の違いを見る。

4.3.1 系統誤差

系統誤差はデータの偏りを表れる誤差で、例えば、電圧計の0点は、完全には0でないというようなものを言う。

重要なことは、系統誤差は、同じ装置による測定で、同じとき、同じ大きさで入ってくるということです。同じコンディでデータを取るとき重要になる。てくるが、これを扱う一策したう法はない。

4.3.2 偶然誤差

偶然誤差の分布も知られる。

偶然誤差は系統誤差と違って理論的に扱うことが出来る。この誤差は測定装置の不正確さや、現象に固有の統計的性質から発生している。

偶然誤差は、熱膨張などのようなコントロールしていない要素から表れるので、もっといろいろなファクターを制御すれば、誤差を小さくできる。

測定誤差は、ほとんどの場合、^{ガウス}ガウス分布と考えられる。系統誤差がないとすると、ガウシアン^のの平均は測定値に等しく、標準偏差は測定の正確さに比例していると考えられる。

系統誤差 > 偶然誤差、となると誤差の総量が大きい。

1/√N ずつ

②のデータが12個ある。5000多次元測定しても偶然誤差がない。

