

3. 核構造の初期のイース

3.1 N. Bohr の複合核の理論

核の内部の核子群の運動として、以下のようにはいふことが考えられる。

- (i) それぞれが独立に動き "Fermi ガス" を形成している。
- (ii) 核子は 99% の α 粒子を形成している、それ以外はいずれの格子内を動く。
- (iii) 液体のよう動く。
- (iv) それ以外の、あるいは異なる形態として動いている。

これは以下のようには検証された

Fermi ガスモデル... 定性的には成功したが、核力を考えると
結合エネルギーの分布は徹底説明できない。

核の α 粒子モデル... 重い核にはよく失敗

N. Bohr の複合核理論

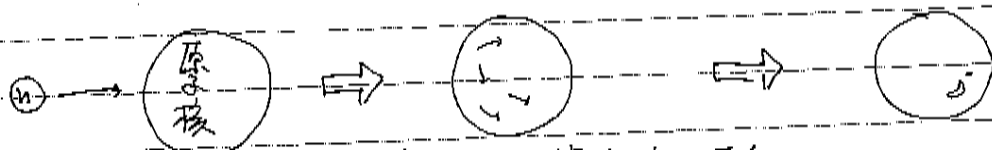
核子はそれぞれ互いに強く結合された粒子の集団であり、
個々の軌道を考えるのではなく、核全体としての集団の
運動を考えるとよい。

Fermi たちは熱中性子および数 MeV のエネルギーの "速い中性子" で
多くの元素を衝撃する実験をした。結果は以下のようである。

- (i) 速い中性子は多くの標的核に大なる確率で捕獲される。
断面積は弾性、非弾性散乱のものと同いくさりで、原子核の
幾何学的断面積に等しい。
- (ii) 重い核に低速の中性子を当てると、断面積や捕獲断面積に
大きなピークが見える。これを共鳴 (resonance) と呼ぶ。
- (iii)

N. Bohr は中性子反応の機構を以下のよう説明した。

(a)



エネルギーは分配され、全体として複合核に至る。

複合核状態はある種の集団的な励起状態。

ゆえにより、このある一つの核子、または α 粒子にこれらの励起エネルギーが集中してその核子が核外に出たり、1線が出たりする以外では準安定な形で長い寿命で継続する。

(b) 核反応 第1段階 複合核形成
" 2 " 複合核崩壊 (第1段階には依存しない)

これは様々な実験事実を説明してくれる (b 頭)

熱中性子や低速中性子は断面積に鋭いピークが現れるのに、速い中性子では断面積が入射エネルギーにあまり依存しないのは何故か?

Bohr は複合核全体のエネルギー準位に着目した。P を固有エネルギー幅として

$$\tau = \frac{\hbar}{P} \quad (1) \quad \text{が準位の平均寿命で与える。}$$

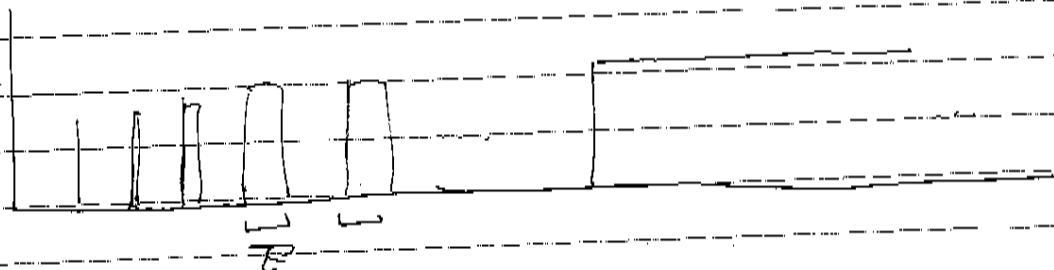
零に近い準位の単位時間あたりの崩壊確率に $\propto$ 例する。

崩壊する確率をモードがあるならば、全体としての崩壊確率は

$$P = \sum P_i \quad (2)$$

と、それぞれ和をとる。

複合核は低い励起状態では崩壊しない。
励起エネルギーが大きくなるにつれて準位間は小さくなり、
一方崩壊過程の数は多いほど大きくなる。



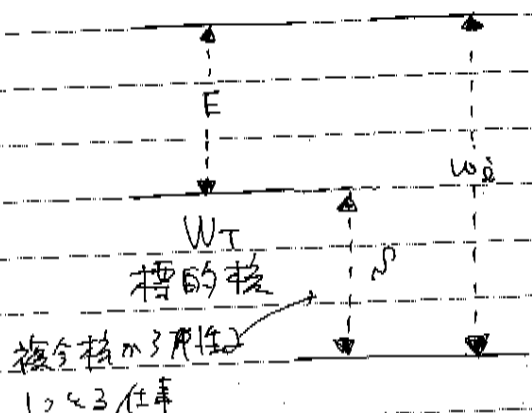
入射エネルギーが小さく、鋭くピークになる。
複合核の準位が小さくなる。

(標的核のエネルギー) + (入射中性子の運動エネルギー)

= (複合核準位のエネルギー) (3)

の時に、共鳴ピークが現れる。

熱中性子では、どのくらいの高エネルギーをもつ複合核準位が
問題になるのだろうか？



入射粒子のエネルギーを E とすると

$$W_T + E = W_C + W_d \quad (\text{共鳴条件})$$

$$W_d = S + E. \quad (4)$$

S の値は中程度の重元素の核では 8 MeV ,
 $A > 200$ では 6 MeV 程度。

$$S: 6 \sim 8 \text{ MeV}$$

第2 複合核過程の統計力学的な考察

(1) 準位の密度

重い核、高い励起エネルギーの小さい増し分の中には非常に多数の量子準位が含まれる(?) ので、統計力学的な計算が可能。

簡単化: 原子核に理想 Fermi ガスのモデルを考えて、中性子と陽子の群れは井戸型ポテンシャルに捕えられて原子核の体積の中に凝集しているとする。

エネルギーの次元をもった温度 $\theta = kT$ を用いる。

$\theta = 0$ は基態核'態。

$E(\theta) - E(0)$ は核全体の励起エネルギーに対応する。

θ が E_F に比べて小さいときは ($\theta < 10$ より)

$$W = E(\theta) - E(0) = \frac{\pi^2}{4} A \frac{\theta^2}{E_F}$$

$$\theta = 2 \sqrt{\frac{E_F W}{\pi^2 A}} \quad (1)$$

$$b = \frac{E_F}{\pi^2 A} \quad (2) \quad \text{と置く} \quad W = \frac{1}{4} \frac{\theta^2}{b} \quad \theta = 2\sqrt{bW} \quad (3)$$

(系のエントロピー S (Boltzmann 定数を単位として測ったもの)
励起エネルギーが W と $W+dW$ の間の準位の数 $\Sigma(W) dW$ と対応すると

$$S = \log Z, \quad Z = e^S \quad \text{とかけると} \quad (4)$$

これをを用いて、準位の平均間隔を用いる。

を励起エネルギー ω の関数として求めよ。

(よく見る) 関係式 $d\omega = T dS$

$$\frac{dS}{d\omega} = \frac{1}{T}$$

11 単位 Boltzmann 定数 k_B であり、全体を k_B で割ったのが

$$\frac{dS}{d\omega} = \frac{1}{\theta} \quad (5)$$

すると (3) を用いて

$$\frac{dS}{d\omega} = \frac{1}{2\sqrt{b\omega}} \quad \text{積分すると}$$

$$\int dS = \int \frac{d\omega}{2\sqrt{b\omega}}$$

$$S = \sqrt{\frac{\omega}{b}} + \text{const} \quad (6) \quad \text{よって (4) より}$$

$$Z = e^S = e^{\text{const}} e^{\sqrt{\frac{\omega}{b}}} = \frac{1}{P_0} e^{\sqrt{\frac{\omega}{b}}} \quad (7)$$

準位の平均間隔は ω の逆数で

$$P = P_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{b}}} \quad (8) \quad \text{よって (7) より}$$

(8) 式について考える。

励起エネルギーが小さくなると、準位の幅は小さくなる。(2) $F(\omega) \propto A$ であり、重い核ほど準位問題の減少が激しい。

b は (2) により計算はできるが、 b は P_0 を $10^{-3} \times \dots$ とし

実験値に合うようにして求めることもできる。

(2) 準位の幅

中性子放出を、やはり統計力学を用いて考える。

励起エネルギーが ω と $\omega + d\omega$ の間にある原子核の集合を考える。

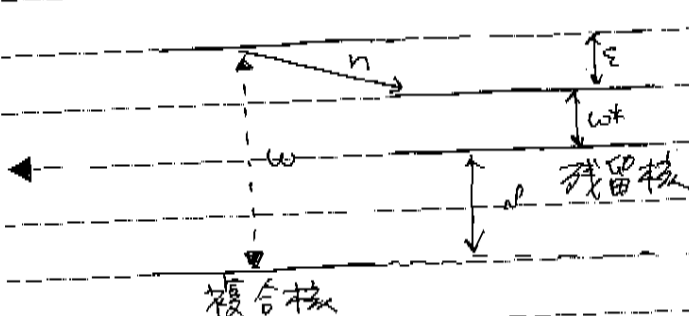
励起準位密度を $\Sigma(\omega)$ 、集合の中の原子核の総数を $\Omega(\omega) d\omega$ とする。

↓

1つの励起状態あたり1個の原子核がある $\Rightarrow \Omega = 1$ になる。

単位時間あたりの中性子放出と崩壊する原子核の平均値は

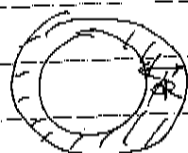
$$d\omega \Sigma(\omega) \frac{P(\omega)}{h} \quad \text{で与えられる。}$$



中性子の単位時間あたりの平均放出数を
残留核の方から与えられる。

残留核の半径 R とする。中性子が運動量 p を持つ複合核の数は

これは
球です。



$$\frac{4\pi R^2 \Delta R p^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \quad \text{に崩壊状態の数}$$

$$\Sigma^*(\omega - S - \varepsilon) d\omega \quad \text{をかけたものになる。}$$

中性子放出に要する時間は、 $\tau = \Delta R / v \cos\theta$ で与えられる。

(したがって、単位時間あたりの崩壊数の数は

$$\frac{1}{\Delta R / v \cos\theta} \frac{4\pi R^2 \Delta R p^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \Sigma^*(\omega - S - \varepsilon) d\omega$$

$$\Sigma \quad \varepsilon: 0 \rightarrow \omega - S \quad \text{まで積分すればいい。}$$

これが (9) に一致するはずである。

$$\frac{1}{\sigma R / u \cos \theta} \frac{4\pi R^2 \sigma R p^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} z^* dw = \frac{p \cos \theta}{M} \frac{4\pi R^2 p^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} z^* dw$$

$$= \frac{4\pi R^2 \cos \theta}{M (2\pi\hbar)^3} \int_0^{\omega - p} \int_0^{\omega - p - \epsilon} \int_0^{\omega - p - \epsilon} z^* dw$$

$$= \frac{2\pi M R^2}{(2\pi\hbar)^3} \cos \theta \int_0^{\omega - p} \int_0^{\omega - p - \epsilon} z^* \epsilon d\epsilon dw$$

$= 4\pi \epsilon$ $\epsilon: 0 \rightarrow \omega - p$ z^* , $d\Omega$ は全立体角で $\frac{4\pi}{3}$ 分ける

$$I_n(\omega) = \frac{\hbar \sigma \pi M R^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{\omega - p} z^*(\omega - p - \epsilon) \epsilon d\epsilon$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi M R^2}{\hbar^2} \int_0^{\omega - p} z^*(\omega - p - \epsilon) \epsilon d\epsilon$$

$\frac{1}{z(\omega)}$ は複合核の平均寿命間隔の逆

$$dI_n(\omega) = \frac{D}{2\pi} \frac{2\pi M R^2}{\hbar^2} z^*(\omega - p - \epsilon) \epsilon d\epsilon \quad (10)$$

この式は単位時間あたり中性子が ϵ と $\epsilon + d\epsilon$ の間の運動エネルギーで放出される確率に $\hbar$ をかけたものに等しい。

z^* の表式 (7) より, z^* は ϵ の関数として与えられる。

$I_n(\omega)$ は (10) を積分して得られるが, z^* は

$$z^*(\omega - p - \epsilon) = \frac{1}{p_0^*} \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega - p - \epsilon}{b^*}}\right) \quad (11)$$

$$I_n(\omega) = \frac{p(\omega)}{2\pi p_0^*} \frac{2\pi M R^2}{\hbar^2} \int_0^{\omega - p} \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega - p - \epsilon}{b^*}}\right) \epsilon d\epsilon \quad (12)$$

と (2) と 0. k.

2.3 < 10 原子核の Fermi ガスモデル

偶, 奇核の非常に単純なモデルとして, 半径 $R = r_0 A^{1/3}$, 深さ U_0 の井戸型ポテンシャルの中で核子が自由運動している系を考える。

核の基底状態 核子群は運動量 0 から 最大 P_F まで $4\pi p^2$ だけ

入っているとする。

状態密度は

$$\rho(p) = 4 \frac{p^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \quad \text{積分して}$$

$$A = 4V \int_0^{P_F} \frac{p^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \quad (V = \frac{4}{3}\pi R^3)$$

$$= \frac{4V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{4\pi}{3} P_F^3 = (1)$$

$$\frac{P_F}{\hbar} = \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{1/3} \rho^{1/3} \quad \rho = \frac{A}{V} = \text{核子密度} \quad (2)$$

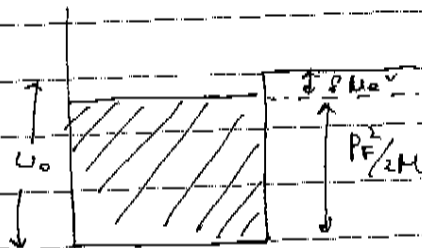
← P_F は A に依存しない (密度の飽和性) P_F も A に無関係になる。

2.4 計算

$$\epsilon_F = \frac{P_F^2}{2M} = \left(\frac{2\pi^2}{2} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2M} \rho^{2/3} = 33.5 \text{ MeV} \quad (4)$$

1 核子から核を構成する仕事を平均 8 MeV とおけば, $\#P$ の

深さは $U_0 = 33.5 + 8 \approx 42.5 \text{ MeV}$ 程度。



基底状態では, 核子たちは $\#P$ の内にとどまっていた。

次に, Fermi カ"ス加有限な温度にあるとき。

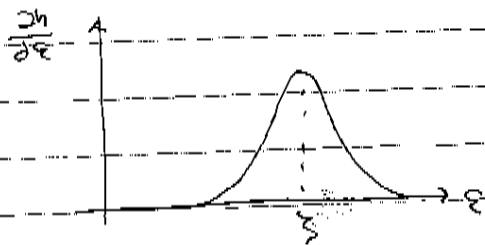
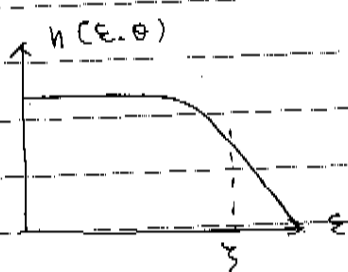
$$E(T) = 4V \int_0^\infty \frac{p^2}{2M} n(p, T) \frac{p^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$p^2/2M = \epsilon \text{ とおくと, } E(T) = 4V \int_0^\infty \epsilon n(\epsilon, T) \frac{(2M\epsilon)^{1/2}}{(2\pi\hbar)^3} d\epsilon$$

$$= 4V \int_0^\infty \epsilon n(\epsilon, T) \frac{(2M\epsilon)^{1/2}}{(2\pi\hbar)^3} d\epsilon$$

$$E(T) = \frac{2V}{\pi^2} \frac{(2M)^{3/2}}{\hbar^3} \int_0^\infty \epsilon n(\epsilon, T) \epsilon^{1/2} d\epsilon \quad (7)$$

$n(\epsilon, T) = \frac{1}{e^{(\epsilon - \zeta)/kT} + 1}$ は Fermi 分布関数である。これを (7) に代入する。



よって $\epsilon = \zeta$ 付近で展開する。このとき、 $\epsilon = \zeta$ 付近で展開する。

分布関数 $Q(\epsilon)$ とおくと、

$$\int_0^\infty Q(\epsilon) n(\epsilon, T) d\epsilon \text{ とおくと, } A(\epsilon) = \int_0^\epsilon Q(\epsilon') d\epsilon' \text{ とおくと}$$

$$\int_0^\infty Q(\epsilon) n(\epsilon, T) d\epsilon = [A(\epsilon) n(\epsilon, T)]_0^\infty - \int_0^\infty A(\epsilon) \frac{dn}{d\epsilon} d\epsilon$$

$$(\because A(0) = 0, n(\infty, T) = 0)$$

第2項 $\epsilon = \zeta$ 付近で展開する

$$\begin{aligned} \int_0^\infty A(\epsilon) \frac{dn}{d\epsilon} d\epsilon &= A(\zeta) \int_0^\infty \frac{dn}{d\epsilon} d\epsilon + \left(\frac{dA}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=\zeta} \int_0^\infty (\epsilon - \zeta) \frac{dn}{d\epsilon} d\epsilon \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 A}{d\epsilon^2} \right)_{\epsilon=\zeta} \int_0^\infty (\epsilon - \zeta)^2 \frac{dn}{d\epsilon} d\epsilon + \dots \end{aligned}$$

この計算のため、

$$I_n = \int_0^\infty (\varepsilon - \xi)^n \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \quad \text{を考へる必要がある。}$$

$$\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} = \frac{-1}{\{e^{(\varepsilon - \xi)/\theta} + 1\}^2} e^{(\varepsilon - \xi)/\theta} \frac{1}{\theta} \quad \text{だから}$$

$$I_n = \int_0^\infty (\varepsilon - \xi)^n \frac{-e^{(\varepsilon - \xi)/\theta}}{\{e^{(\varepsilon - \xi)/\theta} + 1\}^2} \frac{1}{\theta} d\varepsilon \quad \left(\frac{\varepsilon - \xi}{\theta} = x \text{ とおくと} \right)$$

$$= \int_0^\infty (0x)^n \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2} \frac{1}{\theta} \theta dx$$

$$= -\theta^n \int_0^\infty \frac{x^n e^x}{(e^x + 1)^2} dx$$

$$\approx -\theta^n \int_{-\infty}^\infty \frac{x^n e^x}{(e^x + 1)^2} dx$$

$n = \text{奇数}$ なら

x^n は奇関数

$\theta \ll kT$ のときは積分範囲を $-\infty$ から ∞ まで変えよう。

$$\frac{x^n}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)}$$

$n = \text{偶数}$ なら偶関数だから

$$\therefore I_n = 0 \quad (n = \text{奇数})$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^n e^x}{(e^x + 1)^2} dx = 2 \int_0^\infty \frac{x^n e^x}{(e^x + 1)^2} dx$$

$$\int_0^\infty \frac{x^n e^x}{(e^x + 1)^2} dx = - \int_0^\infty x^n \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) dx$$

$$= n \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x + 1} dx$$

$$= n \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \int_0^\infty x^{n-1} e^{-(k+1)x} dx$$

$$= n! \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(k+1)^n}$$

$$= n! \left(\sum_{l=\text{奇数}} \frac{1}{l^n} - \sum_{l=\text{偶数}} \frac{1}{l^n} \right)$$

$$= n! \left(\sum_{l=1}^\infty \frac{1}{l^n} - 2 \sum_{l=\text{偶数}} \frac{1}{l^n} \right) = n! \left(1 - \frac{2}{2^n} \right) \sum_{l=1}^\infty \frac{1}{l^n} = n! \left(1 - 2^{1-n} \right) \zeta(n)$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{は量り知れる。}$$

以上より、計算は

$$\int_0^\infty Q(\varepsilon) n(\varepsilon, \theta) d\varepsilon \rightarrow \int_0^\xi Q(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{dQ}{d\varepsilon} \right)_\xi \theta^2 + \dots$$

(7)より $Q(\varepsilon) = \varepsilon^{3/2}$, (9)より $\theta = \varepsilon^{1/2} \frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{d\varepsilon} \theta^2 + \dots$

$$E(\theta) = \frac{2V}{\pi^2} \frac{(2M^3)^{1/2}}{\hbar^3} \left\{ \frac{2}{5} \xi^{5/2} + \frac{\pi^2}{4} \xi^{1/2} \theta^2 + \dots \right\} \quad (11)$$

$$A = \frac{2V}{\pi^2} \frac{(2M^3)^{1/2}}{\hbar^3} \left\{ \frac{2}{3} \xi^{3/2} + \frac{\pi^2}{12} \xi^{-1/2} \theta^2 + \dots \right\} \quad (12)$$

を得る。次に θ を十分小さいとして (12) から ξ を求める。

$$\xi = \varepsilon_F \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{\theta}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right\} \quad (13)$$

より

$$E(\theta) = E(0) \left\{ 1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{\theta}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right\}, \quad E(0) = \frac{3}{5} A \varepsilon_F$$

以上より

$$\begin{aligned} E(\theta) - E(0) &= E(0) \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{\theta}{\varepsilon_F} \right)^2 \\ &= \frac{\pi^2}{4} A \frac{\theta^2}{\varepsilon_F} \quad \text{となる。} \end{aligned}$$