

§2.6 核子の核子による散乱

(2) 微分断面積の計算法

津村

陽子・中性子の質量は M とする。

$$\begin{aligned} \text{2体問題} \longrightarrow \begin{cases} \text{重心運動} & \hat{H}_{cm} \psi_{cm}(R) = -\frac{\hbar^2}{2 \cdot 2M} \Delta_R \psi_{cm} = E_{cm} \psi_{cm}(R) \\ \text{相対運動} & \hat{H}_{rel} \psi_{rel}(r) = \left[-\frac{\hbar^2}{2 \cdot \frac{M}{2}} \Delta_r \psi_{rel} + V(r) \right] \psi_{rel} = E_{rel} \psi_{rel}(r) \end{cases} \\ \hat{H} = \hat{H}_{cm} + \hat{H}_{rel} \end{aligned}$$

(二) 分離できる 換算質量

二二からは

相対運動について考える

相対運動の波動関数はさらに軌道部分とスピン部分に分離できて

$$\phi^{(1)}(r) \chi_{1, M_s}(\xi_p, \xi_n) \quad (L_s = 1)$$

$$\phi^{(0)}(r) \chi_{0, 0}(\xi_p, \xi_n) \quad (L_s = 0)$$

スピン部分

$$\text{トリplet } \chi_{1, M_s} = \begin{cases} |\uparrow\rangle_p |\uparrow\rangle_n & M_s = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle_p |\downarrow\rangle_n + |\downarrow\rangle_p |\uparrow\rangle_n \} & M_s = 0 \\ |\downarrow\rangle_p |\downarrow\rangle_n & M_s = -1 \end{cases}$$

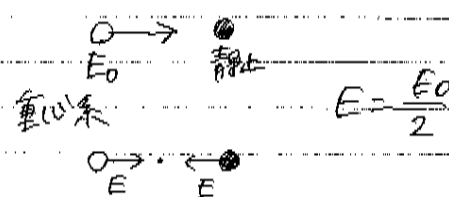
$$\text{シングレット } \chi_{0, 0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle_p |\downarrow\rangle_n - |\downarrow\rangle_p |\uparrow\rangle_n \} \quad M_s = 0$$

軌道部分

$$-\frac{\hbar^2}{M} \Delta \phi^{(r)} + (V^{(r)} - E) \phi^{(r)} = 0 \quad (7)$$

↑
重心座標系での相対エネルギー
各スピン状態での核力ポテンシャル

実験室系



軌道部分のシュレディンガー eq. (7) について考えていく

(7) の解は $r \rightarrow \infty$ で、

・ z 方向に入射する平面波 e^{ikz}
・ 原点からの外向球面波 $f^{(r)}(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$

の重ね合わせに
なっているはず

散乱角 θ の依存

$$\left(f^{(r)}(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \times e^{-i\frac{E}{\hbar^2} t} \right) = f^{(r)}(\theta) \frac{e^{i(kr - Et/\hbar^2)}}{r} \leftarrow \text{外(向)波}$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{M}$$

① 散乱振幅 $f^{(i)}(\theta)$ と微分断面積 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ の関係

確率の流の密度 $\mathcal{S} = \frac{\hbar}{iM} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)$ (9)

・ 散乱波 $f^{(i)}(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$ の流の強さ $I^{(i)}(\theta, \varphi) d\Omega$ を求める

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{より}$$

$$\nabla \phi_{\text{scat}} = \nabla \left(f^{(i)}(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right)$$

$$= \hat{r} f(\theta) (-1 + ikr) \frac{e^{ikr}}{r^2} + \hat{\theta} \frac{e^{ikr}}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$\phi_{\text{scat}}^* \nabla \phi_{\text{scat}} = \hat{r} |f|^2 (-1 + ikr) \frac{1}{r^3} + \hat{\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{1}{r^3}$$

$$\mathcal{S} = \frac{\hbar}{iM} (\phi_s^* \nabla \phi_s - \phi_s \nabla \phi_s^*) = \frac{2\hbar}{M} \text{Im}(\phi_s^* \nabla \phi_s)$$

$$= \frac{2\hbar}{M} \left\{ \hat{r} \frac{k |f^{(i)}(\theta)|^2}{r^2} + \hat{\theta} \frac{\text{Im}(f^* \frac{\partial f}{\partial \theta})}{r^3} \right\} = \hat{r} \underbrace{\frac{2\hbar k}{M} \frac{|f^{(i)}(\theta)|^2}{r^2}}_{S_r} + \hat{\theta} \left(\frac{1}{r^3} \right)$$

$kr \gg 1$ とすると、

$$I^{(i)}(\theta, \varphi) d\Omega = S_r r^2 d\Omega = \frac{2\hbar k}{M} |f^{(i)}(\theta)|^2 d\Omega$$

・ 入射波 e^{ikz}

$$\mathcal{S} = \frac{2\hbar}{M} \text{Im}(e^{-ikz} \cdot ik e^{ikz}) = \frac{2\hbar k}{M} = I_0$$

以上より 微分断面積は、

$$\underbrace{\frac{d\sigma}{d\Omega}}_{(10)} = \frac{I^{(i)}(\theta, \varphi)}{I_0} = \frac{I_0 |f^{(i)}(\theta)|^2}{I_0} = \underbrace{|f^{(i)}(\theta)|^2}$$

② $f^{(l)}(\theta)$ を求める

シュレディンガー eq (7) で、 $r \rightarrow \infty$ で $\phi^{(l)}(r) \simeq e^{ikr} + f^{(l)}(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$ とする解を実際に探す。

簡単のため、テンソル力を無視して核力の中心力部分のみを考えることにする。

→ 軸対称性より、レジェンダー多項式 $P_l(\cos\theta) \propto Y_{l0}(\theta)$ と展開できる

$$\phi^{(l)}(r) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l^{(l)} R_l^{(l)}(r) Y_{l0}(\theta) \quad \text{部分波展開}$$

これを (7) に代入してみると、

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\hbar^2 r^2} \hat{L}^2 \quad \left(\hat{L}^2 = -\frac{\hbar^2}{\sin^2\theta} \left\{ \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right\} \right)$$

$$\hat{L}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = l(l+1) \hbar^2 Y_l^m(\theta, \phi)$$

より、

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l^{(l)} Y_{l0}(\theta) \left[-\frac{\hbar^2}{M} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \left\{ \frac{\hbar^2}{Mr^2} l(l+1) + V^{(l)}(r) - E \right\} R_l^{(l)} \right] = 0$$

よって動径関数 $R_l^{(l)}(r)$ は

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_l^{(l)}}{dr} \right) + \left\{ k^2 - \frac{M}{\hbar^2} V^{(l)} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} R_l^{(l)} = 0 \quad (13)$$

を解く。

(13) の方程式の解の $r \rightarrow \infty$ での漸近形は

$$R_l^{(l)}(r) \simeq \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l^{(l)})}{kr} \quad (14)$$

と表す



$$(13) \Leftrightarrow \frac{d^2 R_l}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_l}{dr} + \left\{ k^2 - \frac{M}{\hbar^2} V^{(l)} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} R_l^{(l)} = 0$$

$r \rightarrow \infty$ では $V^{(l)} \rightarrow 0$ より、

$$(13) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{d^2 R_l}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_l}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R_l + k^2 R_l = 0$$

$$\frac{d^2 P_l}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dP_l}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} P_l + k^2 P_l = 0$$

の二つの独立な解は

$$\begin{cases} \cdot \text{球 Bessel func} & j_l(kr) \\ \cdot \text{球 Neumann func} & n_l(kr) \end{cases}$$

$$r \rightarrow \infty \text{ として } j_l(kr) \sim \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2})$$

$$n_l(kr) \sim -\frac{1}{kr} \cos(kr - \frac{l\pi}{2})$$

$$j_l(\xi) = (-\xi)^l \left(\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \right)^l \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)$$

$$n_l(\xi) = -(-\xi)^l \left(\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \right)^l \left(\frac{\cos \xi}{\xi} \right)$$

24.

(13)の解は、 $r \rightarrow \infty$ として

$$R_l^{(1)}(r) \stackrel{V(r) \rightarrow 0}{\sim} A j_l(kr) + B n_l(kr)$$

$$\stackrel{r \rightarrow \infty}{\sim} C \cdot \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l^{(1)}) \quad \downarrow \text{合成}$$

$\delta_l^{(1)}$ はポテンシャル $V^{(1)}(r)$ の形から決まり、位相のずれと呼ばれる。

平面波 e^{ikz} も球面波の重ね合わせで表すと、

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sqrt{4\pi} \sum_l \sqrt{2l+1} i^l j_l(kr) Y_{l0}(\theta) = \sum_l \sqrt{2l+1} i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (15)$$

☹ e^{ikz} は $V^{(1)}=0$ のときの (13) の解 (原点正則)

$$\rightarrow R_l^{(1)} = j_l(kr)$$

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_l a_l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad \text{とおいて、} a_l \text{ を決める}$$

$$r \rightarrow 0 \text{ として } P_l(\cos \theta) \sim \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2} (\cos \theta)^l$$

$$j_l(kr) \sim \frac{2^l l! (kr)^l}{(2l+1)!}$$

となることを用いて、 $r \rightarrow 0$ として l 次項を比較。

$$\frac{(ikr \cos \theta)^l}{l!} = a_l \frac{2^l l! (kr)^l}{(2l+1)!} \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2} (\cos \theta)^l$$

$$\rightarrow a_l = i^l (2l+1)!$$

(15) と (12) with (14) を見比べると、

ポテンシャル $V^{(i)}(r)$ があるとき $r \rightarrow \infty$ で位相が $\delta_l^{(i)}$ すれでいることがわかる

$r \rightarrow \infty$ では、

$$\begin{aligned}\phi^{(i)}(r) - e^{ikz} &= \frac{1}{ik} \sum_l \left\{ A_l^{(i)} \sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l^{(i)}) - \sqrt{4\pi(2l+1)} i^l \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) \right\} Y_{l0} \\ &= \frac{1}{2ik} \sum_l Y_{l0} \left\{ (A_l^{(i)} e^{i\delta_l^{(i)}} - \sqrt{4\pi(2l+1)} i^l) e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} \right. \\ &\quad \left. - (A_l^{(i)} e^{-i\delta_l^{(i)}} - \sqrt{4\pi(2l+1)} i^l) e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} \right\}\end{aligned}$$

$r \rightarrow \infty$ で (11) $\phi^{(i)}(r) \sim e^{ikz} + f^{(i)}(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$ とおけるために、

内向き球面波 $\frac{e^{-ikr}}{r}$ の係数が 0 になることを要求

→ 係数 $A_l^{(i)}$ が

$$A_l^{(i)} = \sqrt{4\pi(2l+1)} i^l e^{i\delta_l^{(i)}} \quad (16)$$

と決まる。

すると、

$$\begin{aligned}\phi^{(i)}(r) - e^{ikz} &= \frac{1}{2ik} \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)} \{ e^{2i\delta_l^{(i)}} - 1 \} i^l Y_{l0} \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} \\ &= \frac{1}{2ik} \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)} \{ e^{2i\delta_l^{(i)}} - 1 \} Y_{l0} \frac{e^{ikr}}{r}\end{aligned}$$

つまり、

$$f^{(i)}(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)} \{ e^{2i\delta_l^{(i)}} - 1 \} Y_{l0}(\theta) \quad (17)$$

散乱振幅 $f^{(i)}(\theta)$ と $\delta_l^{(i)}$ の関係

微分断面積

散乱振幅

位相のずれ

ポテンシャル

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$

← (10) →

$f^{(i)}(\theta)$

← (17) →

$\delta_l^{(i)}$

← (14) →

$V^{(i)}(r)$

← : 理論的に微分断面積を計算

→ : 散乱の角度分布のデータから実験的にポテンシャルを求める

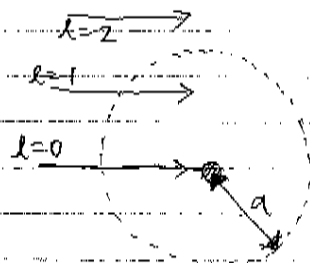
(3) 低エネルギー - 散乱

$$r \rightarrow 0 \text{ で } f_l(kr) \simeq \frac{(kr)^l}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l+1)} \quad (18)$$

これと(15)より、入射平面波の l 部分波の振幅は、

核力の作用半径 $r=a$ では $(ka)^l$ (= etc 列)

→ $ka < 1$ (即ち $2\pi a < \lambda$) のとき、
 l が大きくなるほど散乱されにくくなる
 $S_l^{(i)}$ が小さくなる



$ka \ll 1$ では、 $l=0$ のみが寄与するとよい。
 $(S_l^{(i)} \simeq 0 \quad (l \geq 1))$

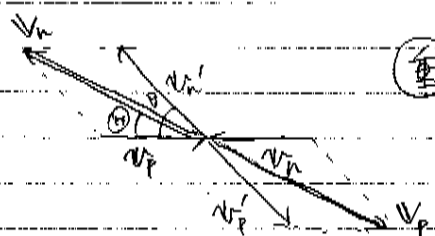
すると、(17), (10) より、

$$\begin{aligned} f^{(i)}(\theta) &= \frac{1}{2ik} \sqrt{4\pi} \{ e^{2iS_0^{(i)}} - 1 \} Y_{00}(\theta) \\ &= \frac{1}{2ik} \{ e^{2iS_0^{(i)}} - 1 \} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f^{(i)}(\theta)|^2 = \frac{2}{4k^2} \{ 1 - \cos 2S_0^{(i)} \} = \frac{\sin^2 S_0^{(i)}}{k^2} \quad (21)$$

となり、重心系では散乱は θ に依らず、等方的。

※ 実験室系では角度に依存する。



(重) $v_p = -v_n, \quad v_p' = -v_n'$

(実) $v_n = v_n' - v_p, \quad v_p = v_p' - v_p \quad (\text{陽子ターゲット})$

2-16図 $|v_n| = |v_n'| = |v_p| = |v_p'|$ により、 $\theta = 2\Theta$

2つの座標系の断面積は、

$$\sigma_{\text{tot}} = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{重}} \sin \Theta d\Theta = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{実}} \sin \theta d\theta \quad \text{となるべきことから、}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{実}} = 4 \cos \Theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{重}} \quad \text{であることがわかる}$$

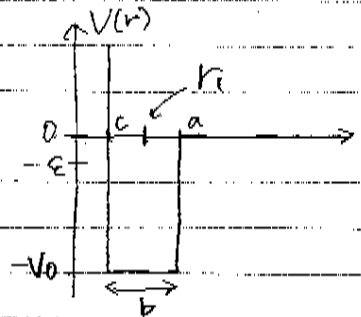
中性子の陽子による散乱では、中性子のエネルギー $E_0 < 10 \text{ MeV}$ のとき (1) $l=0$ のみを考えるとしよい。(120), (121) 式が使える。

この近似のもとで、§2.5(4) の核力ポテンシャルの単純化されたモデル (121) について $\delta_0^{(1)}$ を求めてみる。

3重項状態で $l=0$ のシュレディンガー eq (7) の解は、

(12) & (14) と §2.5-(6) より、

$$\phi^{(1)}(r) = \begin{cases} B \frac{\sin K'(r-c)}{K'r} & (c \leq r \leq a) \quad (22) \\ \exp(i\delta_0^{(1)}) \frac{\sin(kr + \delta_0^{(1)})}{kr} & (a \leq r) \quad (23) \end{cases}$$



$$(\tau = \tau^{\text{NU}}) \quad K' = \frac{\sqrt{M(V_0 + E)}}{\hbar}, \quad k = \frac{\sqrt{ME}}{\hbar} \quad (24)$$

$r=a$ での $\phi^{(1)}(r)$ と $\frac{d\phi^{(1)}}{dr}$ の連続条件から、

$$\cot \delta_0^{(1)} = \frac{\cos ka \cdot K'a \cdot \cot K'b + ka \sin ka}{\sin ka \cdot K'a \cdot \cot K'b - ka \cos ka} \quad (25)$$

$ka \ll 1$, $E \ll V_0$ とし、 $k \cot \delta_0^{(1)}$ を k の冪べき級数に展開すると、

$$k \cot \delta_0^{(1)} = -\frac{1}{d_1} + \frac{1}{2} r_1 k^2 + \dots \quad (26)$$

と表せる。

d_1 : 散乱半径

r_1 : 有効作用半径。

$$\frac{1}{d_1} = K - \frac{1}{2} K^2 r_1 \quad (\tau = \tau^{\text{NU}} \quad \frac{1}{K} = \frac{\hbar}{\sqrt{ME}}) \quad (27)$$

$$r_1 = 2a - b = b + 2c \quad (28) \\ = \frac{a+c}{2}$$

重核素核の3重項基底状態の
波動関数の広がりを表わす量
(§2.5-(2))

[付録 6] ((27), (28) の計算)

$$(25) \quad \cot \delta_0^{(1)} = - \frac{\cos ka \, K' a \cot K' b + ka \sin ka}{\sin ka \, K' a \cot K' b - ka \cos ka} \quad (1)'$$

$$K' = \frac{\sqrt{M(V_0 + E)}}{\hbar}, \quad k = \frac{\sqrt{ME}}{\hbar}, \quad K = \frac{\sqrt{M(V_0 - E)}}{\hbar}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{ME}}{\hbar} \quad \text{etc.}$$

$$K'^2 = K^2 + (k^2 + \kappa^2) \\ = K^2 \left\{ 1 + \frac{k^2 + \kappa^2}{K^2} \right\}$$

 $K \gg k, \kappa \quad \text{etc.}$

$$K' \simeq K \left\{ 1 + \frac{k^2 + \kappa^2}{2K^2} \right\} = K + \frac{k^2 + \kappa^2}{2K} \quad (2)'$$

 etc.

$$\begin{aligned} \cot K' b &\simeq \cot \left[Kb + \frac{k^2 + \kappa^2}{2K} b \right] \\ &\simeq \frac{\cos Kb - \frac{k^2 + \kappa^2}{2K} b \sin Kb}{\sin Kb + \frac{k^2 + \kappa^2}{2K} b \cos Kb} \quad \left(\begin{array}{l} \cos \frac{k^2 + \kappa^2}{2K} b \sim 1 \\ \sin \frac{k^2 + \kappa^2}{2K} b \sim \frac{k^2 + \kappa^2}{2K} b \quad \text{etc.} \end{array} \right) \\ &\simeq \cot Kb \left[1 - \frac{k^2 + \kappa^2}{2K} b \tan Kb \right] \left[1 - \frac{k^2 + \kappa^2}{2K} b \cot Kb \right] \\ &= \cot Kb \left[1 - \frac{k^2 + \kappa^2}{2K} b (\tan Kb + \cot Kb) \right] + O\left(\left(\frac{k^2 + \kappa^2}{2K} b\right)^2\right) \end{aligned} \quad (3)'$$

 $(2)' \times (3)' \quad \text{etc.}$

$$\begin{aligned} K' \cot K' b &= K \cot Kb + \frac{k^2 + \kappa^2}{2K} \left[\cot Kb - Kb - Kb \cot^2 Kb \right] + O\left(\left(\frac{k^2 + \kappa^2}{2K} b\right)^2\right) \\ &= K \cot Kb + \frac{k^2 + \kappa^2}{2K} \left[\cot Kb - \frac{Kb}{\sin^2 Kb} \right] + O(1)^2 \end{aligned}$$

 etc. $Kb \simeq \frac{\pi}{2} \quad \text{etc.} \quad \sin Kb \simeq 1, \quad \cos Kb \simeq 0$

$$K \cot Kb = -K \quad \text{etc.}$$

$$K' \cot K' b \simeq -K - \frac{b}{2} (k^2 + \kappa^2) \quad (4)'$$

(4)'を(1)'の右辺に代入, $\cos ka \simeq 1$, $\sin ka \simeq ka$ とすると,

$$\begin{aligned} k \cot \delta_0^{(1)} &\simeq \frac{-K - \frac{b}{2}(k^2 + K^2) + k^2 a}{a \left[-K - \frac{b}{2}(k^2 + K^2) \right] - 1} \simeq \left\{ -K - \frac{b}{2}(k^2 + K^2) + k^2 a \right\} (1 - Ka) \\ &\simeq -K + \frac{k^2 + K^2}{2} (2a - b) \quad (5) \\ &\equiv -K + \frac{K^2}{2} (2a - b) + \frac{2a - b}{2} k^2 \end{aligned}$$

よって § 2.6-(2b) のように,

$$k \cot \delta_0^{(1)} \simeq -\frac{1}{d_1} + \frac{1}{2} r_1 k^2$$

と表せる,

$$\frac{1}{d_1} = K - \frac{K^2}{2} (2a - b) \quad (27)$$

$$r_1 = 2a - b$$

(28) と表す // (付録6 おわり).

$ka \ll 1$ のエネルギー領域の散乱実験からは、核力について

2つのパラメータ d_1, r_1 しか決まらない.

(V_0, a, b が 完全には決まらない)

→ $l \geq 1$ 次の部分波の位相のずれ $\delta_l^{(1)}$ が交わってくるような
高エネルギーでの実験が必要.

⑤ (26), (27) は 深いつくみポテンシャルに近づく短距離力での
低エネルギーの場合は一般に成り立つが,
(28) は井戸型の場合のみ に成り立つ式.