

P4 理論セ(5/17)

(3) (5エネルギー-散乱(縮退) (P.48~)

津村

① 微分断面積の公式を作る.

λ 射と e^- の中性子もターゲットの陽子もでたらめな方向の向きを構えている
 とすると、トリプレットとシングレットの状態が 3:1 で混じり合っているはず

→ 実験される散乱断面積は、

$$\sigma = \frac{3}{4} \sigma^{(1)} + \frac{1}{4} \sigma^{(0)} \quad (30)$$

と表せる.

$$(21) \quad \frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega} = |f^{(1)}(\theta)|^2 = \frac{\sin^2 \delta_0^{(1)}}{k^2}$$

$$(26) \quad k \cot \delta_0^{(1)} = -\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2} r_1 k^2 + \dots$$

より、 $1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$ を用いると、

$$\sigma^{(1)} \approx \frac{4\pi}{k^2 + \left(-\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2} r_1 k^2\right)^2} \quad (29)$$

シングレットについても同様に

$$k \cot \delta_0^{(0)} = -\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + \dots \quad (32) \quad (\leftrightarrow (26))$$

$$\frac{1}{f_{\text{dot}}} = k_0 - k_0^2 \left(a_0 - \frac{b_0}{2} \right) \quad (33) \quad (\leftrightarrow (29) \& (28))$$

$$\left(\frac{1}{k_0} = \frac{\hbar}{\sqrt{M|E_0|}} \right) \quad (34)$$

E_0 : 重水素核の 1S 状態の固有エネルギー

とすれば、(21)と(32)より、

$$\sigma^{(0)} \approx \frac{4\pi}{k^2 + \left(-\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_0 k^2\right)^2} \quad (31)$$

p. 49

Q d_0 の符号が、1重項状態の結合状態の安定性と対応していること

1重項状態では

$$\cot S_0^{(0)} = \frac{\cot k a_0 K'_0 a_0 \cot K'_0 b_0 + k a_0 \sin k a_0}{\sin k a_0 K'_0 a_0 \cot K'_0 b_0 - k a_0 \cos k a_0} \quad \text{--- (25) ---}$$

$$\xrightarrow{k a_0 \rightarrow 0} \frac{K'_0 a_0 \cot K'_0 b_0}{K'_0 a_0 \cot K'_0 b_0 - 1} \quad (35)$$

$$\left(K'_0 = \frac{\sqrt{M V_0}}{\hbar} \right)$$

また、

$$(32) \quad k \cot S_0^{(0)} = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + \dots \xrightarrow{k a_0 \rightarrow 0} -\frac{1}{d_0}$$

これから、

$$K'_0 b_0 \cot K'_0 b_0 = -\frac{b_0}{d_0 - a_0} \quad (36)$$

$|d_0|$ は 3重項の結合エネルギーより小さいと考えられるので、

$$\frac{1}{K} = \frac{\hbar}{\sqrt{M \varepsilon}} \quad \text{と} \quad \frac{1}{K_0} = \frac{\hbar}{\sqrt{M |d_0|}} \quad (34) \quad \text{から} \quad \frac{1}{K_0} > \frac{1}{K}$$

$$\therefore |d_0| \underset{\substack{\uparrow \\ (33)}}{\sim} \frac{1}{K_0} > \frac{1}{K} > a \quad (37)$$

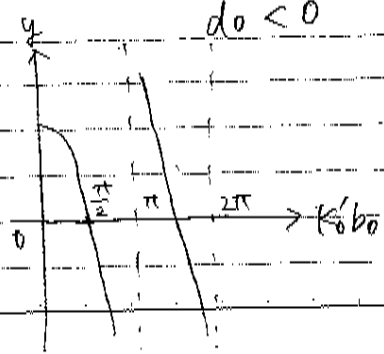
↑ ↑
位置 位置

核力の到達範囲は 3重項と 1重項でそれほど変わらないと考えると、

$$|d_0| > a_0$$

(p. 35 の 2-10 図を参照) (36)より

$$\begin{array}{ll} d_0 > 0 \text{ のとき} & \cot K'_0 b_0 < 0, \quad K'_0 b_0 \approx \frac{\pi}{2} \\ d_0 < 0 & \cot K'_0 b_0 > 0, \quad K'_0 b_0 \approx \frac{\pi}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{結合状態が存在} \\ \text{する} \end{array}$$



Q 定数 d_1, d_0, r_1, r_0 を実験データから決定する。

精密に決めるためには (30) 式では不十分。

・熱中性子 ($E \sim 0.025 \text{ eV}$) の散乱断面積⁽³⁰⁾の値
 $k \rightarrow 0$

$$\sigma = \pi(3d_1^2 + d_0^2) = 20.4 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$$

・12ラ、水素分子による熱中性子の散乱断面積

2つの陽子が逆向きのスピンをもつ。

$$\sigma_{\text{para}} = \pi(3d_1 + d_0)^2$$

2つの陽子の干渉の効果

(39) → 付録7 参照

$$(3d_1 + d_0)^2 = 0.624 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad (39)'$$

(38) と (39)' から

$$d_1 = 0.528 \times 10^{-12} \text{ cm}, \quad d_0 = -2.38 \times 10^{-12} \text{ cm} \quad (40)$$

0 重水素核の $1S$ 状態は不安定

$$(27) \quad \frac{1}{d_1} = k - \frac{1}{2} k^2 r_1 \quad \text{から、}$$

$$\text{有効作用半径 } r_1 = 1.56 \times 10^{-13} \text{ cm} \quad (41)$$

r_0 は陽子-陽子散乱の断面積から決まる。

Pauli 原理から $3S$ 状態は存在しない。

→ 低エネルギーでは $1P$ -波と $1S$ 状態での核力による散乱

- ・ $1P$ -波と核力の散乱の干渉
- ・ 陽子のエネルギーコントロールしやすい

実験的に d_0 と r_0 を決定できる ($r_0 = 2.7 \times 10^{-13} \text{ cm}$) 核力の
 中性子-陽子散乱から決めた d_0 と一致 $\Rightarrow$ 荷電独立性

※ 低エネルギーではテンソル力の寄与を無視したが、低エネルギーでは妥当。

付録 7

$$\sigma_{\text{H}_2\text{分子}} = \pi (3d_1 + d_0)^2 \quad (1)$$

を示す

入射中性子の、逆向きのスピンをもつ 2 陽子 による散乱の干渉が問題である。

1番目の陽子が原点の近く r_1 にあるとき、陽子 2 による散乱だけを考えると
中性子の波動関数は

$$e^{ikz} + f_1 \frac{e^{ikr_1 - r_1}}{|r_1 - r|} \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} e^{ikz} + f_1 \frac{e^{ikr}}{r} \quad (kr_1 \ll 1)$$

水素分子による散乱は

$$e^{ikz} + (f_1 + f_2) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3)$$

§ 2.6-(20) 式より、

$$f^{(1)}(\theta) = \frac{1}{2ik} \{ e^{2i\delta_0^{(1)}} - 1 \} = \frac{e^{i\delta_0^{(1)}}}{2ik} (e^{i\delta_0^{(1)}} - e^{-i\delta_0^{(1)}}) = \frac{e^{i\delta_0^{(1)}}}{k} \sin \delta_0^{(1)} \quad (4)$$

スピンシングレット・トリプレットの 2 つをまとめ、

$$f_i = \frac{3 + (\sigma_n \cdot \sigma_i)}{4} f^{(1)} + \frac{1 - (\sigma_n \cdot \sigma_i)}{4} f^{(0)} \quad (5)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{トリプレットのとき } (\sigma_n \cdot \sigma_i) = 1 \text{ より } f_i = f^{(1)} \\ \text{シングレットのとき } (\sigma_n \cdot \sigma_i) = -3 \text{ より } f_i = f^{(0)} \end{array} \right. \text{ となる } \right)$$

(5) をスピンに依存する部分・しない部分に分けてかくと、

$$f_i = \frac{3f^{(1)} + f^{(0)}}{4} + \frac{f^{(1)} - f^{(0)}}{4} (\sigma_n \cdot \sigma_i) \quad (6)$$

$$\therefore f_1 + f_2 = \frac{3f^{(1)} + f^{(0)}}{2} + \frac{f^{(1)} - f^{(0)}}{4} \underbrace{\sigma_n \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)}_{\text{1つは水素のとき、スピン反対称性より其の期待値 0}} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{H}_2\text{分子}} = 4\pi \left| \frac{3f^{(1)} + f^{(0)}}{2} \right|^2 = \pi |3f^{(1)} + f^{(0)}|^2 \quad (8)$$

これを(4)を代入

$$\begin{aligned} \pi |3f^{(1)} + f^{(0)}|^2 &= \pi \left[9|f^{(1)}|^2 + |f^{(0)}|^2 + 6 \operatorname{Re}[f^{(1)*} f^{(0)}] \right] \\ &= \pi \left\{ 9 \frac{\sin^2 \delta_0^{(1)}}{k^2} + \frac{\sin^2 \delta_0^{(0)}}{k^2} + 6 \frac{\sin \delta_0^{(1)} \sin \delta_0^{(0)}}{k^2} \cos(\delta_0^{(1)} - \delta_0^{(0)}) \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

$$(2b) \quad k \cot \delta_0^{(1)} = -\frac{1}{d_1} + \frac{1}{2} r_1 k^2 + \dots$$

ここで $k \rightarrow 0$ のとき $\sin \delta_0^{(1)} \simeq k d_1$, $\cos \delta_0^{(1)} \simeq 1$ より、

これを(9)に適用すると、

$$\sigma_{\text{1波長}} = \pi (9d_1^2 + d_0^2 + \underbrace{6d_1 d_0}_{\text{干渉項}}) = \pi |3d_1 + d_0|^2 \quad \square$$

(4) 高エネルギー散乱と交換力

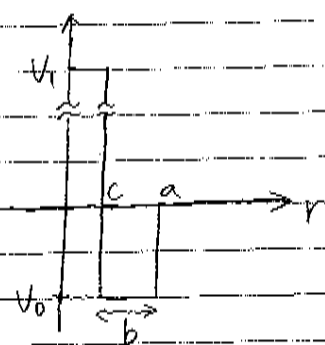
低エネルギー散乱 $\rightarrow l=0$ だけ ($S_0^{(l)}(k)$) の情報だけ
 高エネルギー $\rightarrow S_1^{(l)}(k), S_2^{(l)}(k), \dots$ など情報が増える

核子-核子散乱を高エネルギーで実験すれば、
 核力ポテンシャルの形について詳細が分かる。

・核力の交換力部分と非交換力部分の混じり具合はどの程度か？

高エネルギーの中性子-陽子散乱をBorn近似で扱う

- (注)・Born近似は高エネルギーのときよい近似となる。
 ・Born近似は摂動論に基づいているから、
 斥力coreを十分高いか有限の高さをもつ斥力
 ポテンシャルで近似しておく必要がある。



① 中性子-陽子散乱について

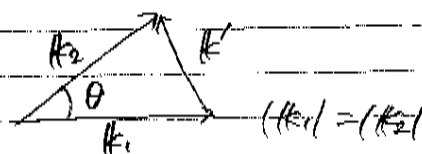
・Born近似での散乱振幅は、

$$f(\theta) = -\frac{M}{4\pi\hbar^2} \int \exp(-ik_2 \cdot r) V^{(1)}(r) \exp(ik_1 \cdot r) d^3r \quad (43)$$

$\exp(ik_1 \cdot r)$: 衝突前の平面波

$\exp(ik_2 \cdot r)$: 衝突後

r は陽子から測った中性子の位置ベクトル



$V(r)$ が中心力ポテンシャルと仮定、 k' と k のなす角を θ' とすると、

$$\int \exp(-ik_2 \cdot r) V^{(1)}(r) \exp(ik_1 \cdot r) d^3r$$

$$= \int \exp(-ik' \cdot r) V^{(1)}(r) d^3r$$

$$= \int_0^\infty V^{(1)}(r) r^2 dr \int \exp(-ik' r \cos \theta') d(\cos \theta') d\varphi$$

$$= \int_0^\infty V^{(1)}(r) r^2 dr \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{ik'} (e^{ik'r} - e^{-ik'r})$$

$$= \frac{4\pi}{k'} \int_0^\infty V(r) r \sin kr dr$$

$$\therefore f(\theta) = -\frac{M}{\hbar^2 k'} \int_0^\infty V(r) r \sin kr dr \quad (44)$$

$$k' = |k_2 - k_1| = 2k \sin \frac{\theta}{2} \quad (45)$$

(5) 斥力 core の問題

位相のずれを Born 近似で求める

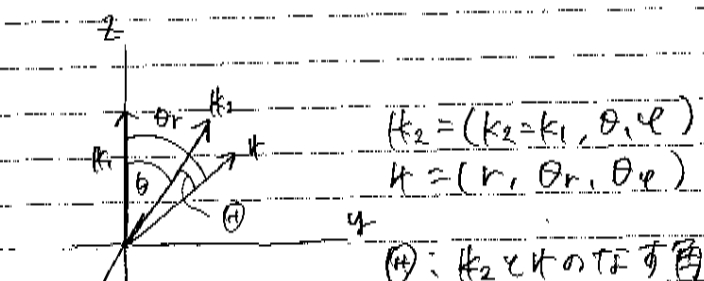
$$\delta_l(k) = -\frac{Mk}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) j_l^2(kr) r^2 dr \quad (50)$$

① [付録 8]

§2.6 (15) 式より、

$$e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{4\pi} \sum_l \sqrt{2l+1} i^l j_l(kr) Y_{l0}(\theta_r) \quad (3)'$$

$$e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{4\pi} \sum_{l'} \sqrt{2l'+1} (-i)^{l'} j_{l'}(kr) Y_{l'0}(\theta_r) \quad (4)'$$



①式

$$Y_{l'0}(\Theta) = \left(\frac{4\pi}{2l'+1} \right)^{1/2} \sum_{m'} Y_{l'm'}^*(\theta_r, \varphi_r) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \quad \text{を用いると,}$$

(4)'は、

$$e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} = 4\pi \sum_{l'm'} (-i)^{l'} j_{l'}(kr) Y_{l'm'}^*(\theta_r, \varphi_r) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \quad (5)'$$

Born 近似での 散乱振幅の式 (§2.6-(43))

$$f(\theta) = -\frac{M}{4\pi\hbar^2} \int_0^\infty e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} V(r) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (2)'$$

(2)', (5)' を代入、 θ_r, φ_r について積分すると

$$f(\theta) = -\frac{\sqrt{4\pi}M}{\hbar^2} \int_0^\infty \sum_l \sum_{l'm'} \sqrt{2l+1} i^{l-l'} j_l(kr) j_{l'}(kr) \underbrace{Y_{l0}(\theta_r) Y_{l'm'}^*(\theta_r, \varphi_r) Y_{l'm'}(\theta, \varphi)}_{\times V(r) r^2 dr d(\cos\theta_r) d\varphi_r}$$

$$= -\frac{M}{\hbar^2} \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)} \int_0^\infty j_l^2(kr) V(r) r^2 dr Y_{l0}(\theta) \quad (6)'$$

部分波の方法による $f(\theta)$ の式 (2.6-17) から

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\theta) &= \frac{1}{2ik} \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)} \{ e^{2i\delta_l^{(1)}} - 1 \} Y_{l0}(\theta) \quad \text{Born 近似} \\ &\approx \frac{1}{2ik} \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)} (2i\delta_l^{(1)}) Y_{l0}(\theta) \quad (|\delta_l| \ll 1 \text{ とした}) \\ &= \frac{1}{k} \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)} \delta_l Y_{l0}(\theta) \quad (7)' \end{aligned}$$

(6)' と (7)' の比較から、 $|\delta_l| \ll 1$ のとき

$$\delta_l = -\frac{Mk}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) j_l(kr) r^2 dr \quad (50) \quad \text{(1冊8頁4)}$$

(50) 式から、

$$\begin{aligned} V(r) < 0 &\Rightarrow \delta_l > 0 \\ V(r) > 0 &\Rightarrow \delta_l < 0 \end{aligned}$$

$V(r)$ に正の部分と負の部分が混ざっているときはどうなるか、

2-17図のポテンシャル V について、 δ_0 を計算してみよう

$$j_0(kr) = \frac{\sin(kr)}{kr} \quad \text{より、}$$

$$\begin{aligned} \delta_0(k) &= -\frac{M}{\hbar^2 k} \int_0^\infty V(r) \sin^2 kr dr \\ &= -\frac{M}{\hbar^2 k} \left\{ V_1 \int_0^c \sin^2 kr dr - V_0 \int_c^a \sin^2 kr dr \right\} \\ &= -\frac{M}{2\hbar^2 k} \left\{ (cV_1 - bV_0) - c(V_1 + V_0) \frac{\sin 2kc}{2ka} + aV_0 \frac{\sin 2ka}{2ka} \right\} \quad (51) \end{aligned}$$

井戸 core の高さ V_1 は十分に高く $cV_1 > bV_0$ とする。また $a \gg c$ を仮定。

• $2kc \ll 1$, $2ka \gg 1$ となる k の領域では、

$$\delta_0(k) \approx \frac{MaV_0}{2\hbar^2 k} > 0$$

・ $2kc \gg 1, 2ka \gg 1$ となるときは、

$$S_0(k) \simeq -\frac{M}{2\hbar^2 k} (cV_1 - bV_0) < 0$$

よって $2kc \simeq 1$ として

$$\begin{cases} k \lesssim \bar{k} & \text{のとき } S_0 \gtrsim 0 \\ k \simeq \bar{k} & S_0 \simeq 0 \\ k \gtrsim \bar{k} & S_0 \lesssim 0 \end{cases}$$

2-20図の 高エネルギー 中子-陽子散乱の 1S_0 散乱では、

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{M} \simeq 25 \text{ MeV} \text{ で } S_0(k) \simeq 0.$$

$$\rightarrow \frac{\hbar^2 \bar{k}^2}{M} = 25 \text{ MeV}, \quad 2\bar{k}c \simeq 1 \text{ より}$$

斥力 core の半径 $c \simeq 0.3 \text{ fm}$ と見積られる

(精密な計算によれば $c \simeq 0.4$ から 0.5 fm)