

P20~32 P. 197~199

2核力の問題

§2.1 原子核の結合エネルギーの規則性

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{原子番号 } Z \\ \text{質量数 } A \\ \text{中性子数 } N = A - Z \end{array} \right. \text{ の原子核について } \left\{ \begin{array}{l} \text{原子核の質量 } \bar{M}(Z, A) \\ \text{陽子の質量 } M_p \\ \text{中性子の質量 } M_n \end{array} \right. \text{ とすると.}$$

原子核の質量よりも陽子と中性子が核力の届かない距離にあるときの陽子、中性子の質量の総和が大きい (1) 式

$$\bar{M}(Z, A) = Z M_p + (A - Z) M_n - \frac{1}{c^2} B(Z, A) \quad (1)$$

ここで $B(Z, A)$ は結合エネルギー

(1) 式の両辺に c^2 をかけると

$$\bar{M}(Z, A) c^2 = Z M_p c^2 + (A - Z) M_n c^2 - B(Z, A) \quad (1, a)$$

上式より、原子核の内部エネルギーが、陽子、中性子の内部エネルギーの総和よりも小さい

○ 結合エネルギー $B(Z, A)$

核子同士が核力によって寄せ合い、密集することによって粒子群のポテンシャルエネルギーは、低くなる。(負の値になる) その低下分が、核内での粒子群の運動エネルギーを差し引いたもの。

- ・ $B(Z, A)$ が大きいほど原子核はより安定
- ・ $B(Z, A)$ は $\bar{M}(Z, A) c^2$ の 1% 近くに達する
- ・ 原子核を崩壊させるのに $B(Z, A)$ だけの仕事が必要

結合エネルギーに関連した規則性

- (i) $\bar{M}(Z, A)$ が非常に小さい核では A とともに $B(Z, A)$ が急激に大きくなる
 (c) H, He 2-1 表参照、約 4 倍近...
- (ii) より重い核では核子一個あたりの結合エネルギー $\frac{B(Z, A)}{A}$ はほぼ一定で
 $B(Z, A) \propto A$
 となっている。(結合エネルギーの飽和性)
 → 液体との類似性

(iii) より詳しく見ると $\frac{B(Z,A)}{A}$ は Fe のあたりまで上昇, Z 以上では下降 (2-1 図)

(iv) 安定元素では $Z \leq 30$ の領域で $Z=N$ の傾向が強く

Z がより大きくなると $N > Z$ の方向に曲がり自然放射線性元素では $N \approx 1.6Z$ ぐらい

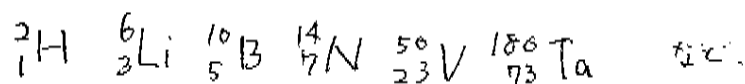
→ 陽子が増えると陽子間のクーロン斥力により不安定

→ 陽子を中性子に置き換えて安定させる

→ やはり $N=Z$ で安定

(v) N や Z が偶数のほうが奇数よりも安定

N も Z も奇数な安定核は



§ 2.2 原子核の質量公式

Weizsäcker - Bethe の質量公式

$$B(Z,A) = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{(A-2Z)^2}{A} - a_4 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \delta(A)$$

○ 第一項: $a_1 A$ 体積エネルギー

§ 2.1 (ii) で述べた $B(Z,A) \propto A$ という関係を表す項

○ 第二項: $-a_2 A^{2/3}$ 表面エネルギー

表面の存在によるエネルギーの損失

↳ 原子核の内部にある核子は全方向から核力を受けるが

表面にある核子は内側からしか核力を受けなためポテンシャルが高くなる。

{ 液体の表面張力との類似

半径 R の球状液滴の表面エネルギー

表面張力を σ とすると表面エネルギーは

$$(\text{表面エネルギー}) = (\text{表面張力}) \cdot (\text{表面積}) = \sigma \cdot 4\pi R^2$$

で得られる。

原子核の体積は A に比例すると考えられるため $(A^{2/3}) = A^{2/3}$ に比例と考えられる

○ 第三項: $-a_3 \frac{(A-2Z)^2}{A}$ 対称エネルギー

§ 2.1 (iv) で述べた $Z=N=A/2$ の核の安定性を表す項

第四項: $-C_4 \frac{Z^2}{A^{1/3}}$ 静電エネルギー (クーロンエネルギー)

原子核を半径 R の一様な電荷密度を持つ球とすると:

この静電エネルギーは $\frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R}$ となる.

R は $A^{1/3}$ に比例すると考えられるとするとこの項は $\frac{Z^2}{A^{1/3}}$ に比例

第五項: $\delta(A)$

N と Z の偶奇による安定性 (§2.1 (v)) を表す項

偶奇を e, o と表すと $\delta(A)$ の候補の1つとして

$$\begin{cases} (N, Z) \text{ が } (e, e) & \delta A = \frac{132}{A} \text{ MeV} \\ (N, Z) \text{ が } (e, o) \text{ か } (o, e) & \delta A = 0 \\ (N, Z) \text{ が } (o, o) & \delta A = -\frac{132}{A} \text{ MeV} \end{cases} \quad (2)$$

注意:

- ・ §2.1 (i) で挙げたような非常に軽い核では必ずその規則性を表せていない
- ・ $B(Z, A)$ を連続関数で表そうとしたもので、平均的なふるまいを記述したもの

§2.3 β 崩壊に対する安定性

質量数 A を決めたとき $B(Z, A)$ が極大になる原子番号 Z を Z_0 とすると

Weizsäcker-Bethe の公式から

$$\left(\frac{\partial B(Z, A)}{\partial Z} \right)_{A=\text{定数}} = 0$$

このときの Z が Z_0 にあたる. したがって

$$Z_0 = \frac{\frac{A}{2}}{1 + \frac{0.6}{40.3} A^{2/3}} = \frac{\frac{A}{2}}{1 + 0.0075 A^{2/3}} \quad (1)$$

と求められる.

c) $A=100$ のとき $Z_0=43.5$ 2-2図から $A=100$ となる Z は43あたりだとわかる.

β 崩壊の起こる条件

β^- decay $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$

β^+ decay $p \rightarrow n + e^+ + \nu$

Electron Capture $p + e^- \rightarrow n + \nu$

$$M(Z, A) > M(Z+1, A)$$

$$M(Z, A) > M(Z-1, A) + 2m_e$$

$$M(Z, A) > M(Z-1, A) + \frac{A}{c^2}$$

捕獲される電子
の結合エネルギー

ここで $M(2, A)$, $M(2+1, A)$, $M(2-1, A)$ は 中性原子の質量

Weizsäcker - Bethe の質量公式を $Z, N (= A - Z)$ を直交軸にとり $\bar{M}$ を Z, N 面に垂直な方向にとると、安定核付近に谷がでる

→ Heisenberg の谷

$S(A)$ の値によつて 3つの曲面がでる

→ 一番下 (e, e)

真ん中 $(e, 0)$

一番上 $(0, 0)$

β 崩壊の場合

(i) (N, Z) が $(e, 0)$ または $(0, e)$ のとき (A が奇数, $S(A) = 0$)

原子核は $(e, 0) \rightleftharpoons (0, e)$ と変化する

$A = \text{const.}$ の面での曲面の切り口の曲線上を移動 (2-5図)

ただし β 崩壊の度に N と Z の偶奇が入れ替わる $(e, 0) \rightarrow (0, e) \rightarrow (e, 0) \rightarrow \dots$

→ 安定核はただ一つ

($\bar{M}$ が極小となる点が整数かつ $Z_0 \pm 1$ が左右対称である場合をのぞく)

(ii) (N, Z) が (e, e) または $(0, 0)$ のとき (A が偶数, $S(A) = \pm \frac{132}{A}$)

原子核は $(e, e) \rightleftharpoons (0, 0)$ と変化する

$A = \text{const.}$ の面での 2つの曲面 ($S(A) = \pm \frac{132}{A}$) の切り口の 2本の曲線を交互に移動 (2-6図)

β 崩壊の度に $(e, e) \rightarrow (0, 0) \rightarrow (e, e) \rightarrow \dots$ と変わる

→ 安定核は 1つから3つ

2-6図のように $(0, 0)$ 核と (e, e) 核の $\bar{M}$ の大きさに依る

§ 2.4 結合エネルギーと核力

結合エネルギーの規則性 から核力の法則を探す

体積エネルギー
 対称エネルギー
 N, Z の偶奇による相違

・交換力

・ Heisenberg が導入

・ 水素原子と水素原子イオンの間に斥力く力に似ていると仮定

H

H^+

・ 電子が2つの陽子の間で交換され H と H^+ の位置が入れ替わる → 力で力が現れる

Heisenberg力 - 位置座標とスピン座標の両方を交換 -

Heisenberg力のポテンシャルを V_H とする。

中性子と陽子の位置ベクトルとスピン座標を $r_1, \zeta_1; r_2, \zeta_2$ とし、

2粒子系の波動関数を $\phi(r_1, \zeta_1; r_2, \zeta_2)$ とする

$$V_H \phi(r_1, \zeta_1; r_2, \zeta_2) = v_H(r) \phi(r_2, \zeta_2; r_1, \zeta_1) \quad (1)$$

($v_H(r)$ は $r = |r_2 - r_1|$ の関数)

座標交換の演算子

$$P_r \phi(r_1, \zeta_1; r_2, \zeta_2) = \phi(r_2, \zeta_1; r_1, \zeta_2) \quad (\text{位置}) \quad (2)$$

$$P_\zeta \phi(r_1, \zeta_1; r_2, \zeta_2) = \phi(r_1, \zeta_2; r_2, \zeta_1) \quad (\text{スピン})$$

を用いると

$$V_H = v_H(r) P_r P_\zeta \quad (3)$$

とかける。

Majorana力 - 位置座標のみ -

$$V_M = v_M(r) P_r \quad (4)$$

Bartlett力 - スピン座標のみ -

$$V_B = v_B(r) P_\zeta \quad (5)$$

Wigner力 - 交換しない -

$$V_W = v_W(r) \quad (6)$$

交換力の特色 - Majorana力の例 -

$\phi(r_1, \zeta_1; r_2, \zeta_2)$ が位置座標に対して対称又は反対称の時

$$\begin{cases} P_r \phi(r_1, \zeta_1; r_2, \zeta_2) = \phi(r_2, \zeta_1; r_1, \zeta_2) = \phi(r_1, \zeta_1; r_2, \zeta_2) & \text{: 対称} \\ & = -\phi(r_1, \zeta_1; r_2, \zeta_2) & \text{: 反対称} \end{cases}$$

なので

$$\begin{cases} V_M \phi = v_M(r) \phi & \text{対称} \\ V_M \phi = -v_M(r) \phi & \text{反対称} \end{cases} \quad (7)$$

$v_M(r) < 0$ のときは
対称なとき 引力
反対称なとき 斥力

他の力の場合は 2-3表参照

結合エネルギーの飽和性

Wigner 力の場合

- ・ 核のポテンシャルエネルギーは核子が核力の作用半径内に密集すると最も低い。 A^2 に比例
- ・ 不確定性関係から、小さい球内に核子があることで核子の運動エネルギーは高くなる。

しかし核全体の運動エネルギーは A に比例するから、

↓

$A \gg 1$ の重核になれば、大きな密度と大きな結合エネルギーを持つ飽和性はない。

「核力の荷電独立性」の場合

↳ 2個の中性子、陽子間に働く力と中性子-陽子間に働く力が同種の交換力

$(N, 2) = (e, e)$ から $N=2$ のとき、

Majorana 力

対称核子の数を n_+ 、反対称核子の数を n_- とする。

$$n_+ - n_- = 2A - \frac{A^2}{8} \quad (8)$$

$A \gg 1$ でポテンシャルエネルギーが正となるため斥力が強く、

↳ 核力の作用圏内に密集しない

↳ 密度一定となり飽和性が実現するはず

Heisenberg 力

n_+, n_- は位置、スピン両方に対して対称、反対称

$$n_+ - n_- = A - \frac{A^2}{4} \quad (9)$$

Majorana 力と同じ

Bartlett 力

n_+, n_- はスピンに対して対称、反対称

$$n_+ - n_- = -A + \frac{A^2}{4} \quad (10)$$

2-3表のように $\bar{v}_B(H)$ を決めると飽和性はない。

対称エネルギー

同重核の中では $N=2$ のとき $n_+ - n_-$ が最大となる。

↳ よって $N=2Z$ 対称エネルギー最低

$$n_+ - n_- = \begin{cases} (2A - \frac{A^2}{8}) - 2T_z - \frac{1}{2}T_z^2 & T_z > 0 \\ (2A - \frac{A^2}{8}) + 2T_z - \frac{1}{2}T_z^2 & T_z < 0 \end{cases} \quad (9)$$

これを図にすると 付 3-1 図のようになる

$T_z = 0$ ($N=Z$) のとき $n_+ - n_-$ が最大になる

→ 対称核の場合