P4 理論ゼミ　　　　　　　　　　　　米内

メシア 第10章 散乱の問題

§1 序節　略

I. 断面積と散乱振幅

§2 断面積の定義

$$J = \rho v$$

J: 入射流束の大きさ　ρ: 入射ビームの単位体積あたりの粒子の数

v: 入射粒子の速さ

ρが十分に小さい場合 入射粒子は独立に散乱するとする。

n: 立体角$d\Omega$内に散乱される粒子の数

とすると

$$n = J\Sigma(\Omega)d\Omega$$

$\Sigma(\Omega)$: 散乱の Ω 方向における断面積(面積の次元を持つ)

標的がN個の粒子から成り、かつ多重散乱が起きない場合

$$n = JN\sigma(\Omega)d\Omega$$

とかけ

$\sigma(\Omega)$は散乱の微分断面積と言われる。

散乱の全断面積:

$$\sigma_{tot} = \int\sigma(\Omega)d\Omega$$

§3 定常散乱波

質量 m　エネルギー E　運動量 p を持つ

近距離力のポテンシャル $V(r)$

での散乱を考える

シュレディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{r})\right]\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = E\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$$

を満たし無限遠で

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + f(\Omega)\frac{e^{ikr}}{r} \tag{1}$$

の形となる解$\psi_{\boldsymbol{k}}$を定常散乱波といい $f(\Omega)$を散乱振幅という

流れの密度ベクトル

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(\boldsymbol{r})(\nabla\psi(\boldsymbol{r})) - (\nabla\psi(\boldsymbol{r}))^*\psi(\boldsymbol{r})\right]$$

に(1)式の各項を代入すると

平面波の項 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar}{2mi}\left[e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\left(i\boldsymbol{k}\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) - \left(-i\boldsymbol{k}\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] = \frac{\hbar}{2mi}(2i\boldsymbol{k}) = \frac{\hbar}{m}\boldsymbol{k}$$

→ 運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$, 密度 1, の等速度粒子ビーム

=入射ビーム

$f(\Omega)\frac{e^{ikr}}{r}$ の項

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar}{2mi}\left[f^*(\Omega)\frac{e^{-ikr}}{r}f(\Omega)e^{ikr}\left(ik\frac{\boldsymbol{r}}{r^2} - \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) - \left(f^*(\Omega)e^{-ikr}\left(-ik\frac{\boldsymbol{r}}{r^2} - \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\right)f(\Omega)e^{ikr}\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}2ik|f(\Omega)|^2\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\hbar k}{m}\frac{|f(\Omega)|^2\boldsymbol{r}}{r^3}$$

→ $\boldsymbol{r}$ の方向に密度 $|f(\Omega)|^2/r^2$ の波動

= 散乱中心から放射状に広がる散乱波

この解釈で$\mathcal{N}$を求めると

立体角$d\Omega$を通過する散乱粒子の流束を求めればよく (N=1として)

$$\mathcal{N} = \frac{\hbar k}{m}|f(\Omega)^2|\,d\Omega$$

$J = \frac{\hbar k}{m}$ なので

$$\underline{\sigma(\Omega) = |f(\Omega)|^2} \tag{2}$$

§4 波束のビームによる散乱現象の表現

§3 のような説明は不正確 (以下の2点)

・流れの密度ベクトルを求める際 入射波と散乱波の干渉を無視

・定常散乱波

$$\psi_k(r)\, e^{-iEt/\hbar} \qquad (3)$$

という表現は正確でなく、散乱する粒子は、定常波を重ね合わせた波束である。

波束の中心の運動

$$\langle r \rangle = b + v(t - t_0) \qquad (t \ll t_0)$$

b：衝突パラメータ　　v：群速度 $\frac{\hbar k}{m}$

t_0：ポテンシャルのないとき、波束の中心が散乱体の位置を過ぎる時刻

各パラメータの条件 (散乱の測定のための条件)

$\lambda = \hbar/mv$ ：入射波束の平均波長

d, l ：入射波束の横方向、縦方向の大きさ

a ：散乱領域

D ：散乱領域から測定器までの距離

不確定性関係から入射の方向とエネルギーを決めると仮定しているので

$$\lambda \ll d \quad と \quad \lambda \ll l \qquad (4)$$

波束の形によって特殊な影響を受けないために

$$a \ll d, l \qquad (5)$$

$b > d$ ならば、散乱は起きない。

$b < d$ のとき $t_1 \simeq t_0 - (l/v)$ に散乱領域に達する

波束の拡散を無視できる範囲にとどめるため

$$\sqrt{\lambda D} \ll d, l \qquad (6)$$

測定される波が散乱中心の影響を受けないために

$$a, \lambda \ll D \tag{7}$$

また透過波が測定に混ざらないようにするため

$$d \ll D\alpha\theta \tag{8}$$

(4)-(8)から

$$a, \sqrt{\lambda D} \ll l \tag{9a}$$

$$a, \sqrt{\lambda D} \ll d \ll D \tag{9b}$$

§5. ポテンシャルによる波束の散乱

ノルム1の関数 $\chi(\rho)$ とそのフーリエ変換 $A(\kappa)$ を導入する

$$\int |\chi(\rho)|^2 d\rho = 1 \tag{10}$$

$$\chi(\rho) = \int A(\kappa) \exp(i\kappa\cdot\rho)\, d\kappa \tag{11}$$

$\chi(\rho)$：実関数で $\rho=0$ を中心に縦に l 横に d の領域で顕著な値をとる。以下では $l \simeq d$ とする

この系の波束を $\Psi_l(r,t)$, 自由波束を $\Phi_l(r,t)$ とすると

$$\Phi_l(r,0) = e^{ik\cdot(r-l)}\chi(r-l) = e^{ik\cdot(r-l)}\int A(k'-k)\, e^{i(k'-k)\cdot(r-l)} dk'$$

$$= \int A(k'-k)\, e^{ik'\cdot(r-l)} dk'$$

$$\Phi_l(r,t) = \int A(k'-k)\, e^{i[k'\cdot(r-l) - E't/\hbar]} dk' \tag{12}$$

$E' = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}$ を $k'=k$ のまわりでべき級数展開すると

$$E' = E + \frac{\hbar k}{m}\cdot(k'-k) + O(k'-k)$$

$$\simeq E + \hbar v\cdot(k'-k)$$

(12)に代入して

$$\Phi_l(r,t) \simeq e^{ik\cdot(r-l)}\int A(k-k')\, e^{i[(k'-k)\cdot(r-l) - Et/\hbar - vt\cdot(k'-k)]} dk'$$

$$= e^{-ik\cdot l}\, e^{i[k\cdot r - Et/\hbar]}\chi(r - vt - l) \tag{13}$$

(12)式の右辺の平面波 $e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}$ の部分を定常散乱波 $\psi_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r})$ に替えたものが $\Psi_{\boldsymbol{\ell}}(\boldsymbol{r},t)$

$$\Psi_{\boldsymbol{\ell}}(\boldsymbol{r},t) = \int A(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\, e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{\ell}}\, \psi_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r})\, e^{-E't/\hbar}\, d\boldsymbol{k}' \quad (14)$$

- $A(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})$ は $\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$ のまわりでのみピークを持つ関数
  - → 主要な寄与は $\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$ のまわり
- $t \ll -\frac{\ell}{v}$ (波束1つ分進むよりもかなり短い時間のとき)
  - $e^{-iE't/\hbar}$ の項により積分は速く変化するので積分が0になる
  - → ただし r が $v|t|$ 程度のところ(波束の中心付近)では位相が停留値を持つ($[i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r} - \frac{E't}{\hbar}]$ が0に近い)ので積分に寄与する

→ $\psi_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r})$ をその漸近式

$$\psi_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r}) \sim e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}} + f_{\boldsymbol{k}'}(\Omega)\frac{e^{ik'r}}{r} \quad (15)$$

で置き換えられる領域のみが積分に寄与

(15)を(14)に代入し

$$\Psi_{\boldsymbol{\ell}}(\boldsymbol{r},t) \underset{t\to\infty}{\sim} \Phi_{\boldsymbol{\ell}}(\boldsymbol{r},t) + \Psi_{\boldsymbol{\ell}}^{(d)}(\boldsymbol{r},t) \quad (16)$$

$$\Psi_{\boldsymbol{\ell}}^{(d)} = \int A(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\, e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{\ell}}\, f_{\boldsymbol{k}'}(\Omega)\frac{e^{i[k'r-\frac{E't}{\hbar}]}}{r}\, d\boldsymbol{k}' \quad (17)$$

$t\to-\infty$ のとき $\Psi_{\boldsymbol{\ell}}^{(d)}$ は $\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$ で停留値を持たず、その積分は常に0

→ $\Psi_{\boldsymbol{\ell}}$ が自由波束と一致

$\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$ のまわりの $1/a \simeq 1/\ell$ の幅の領域で
「方向とエネルギーの散らばりが十分に小さく
$|\boldsymbol{k}'|$ が一定である」
という仮定のもとで

$f_{k'}(\Omega)$ の偏角を $k'=k$ のまわりでべき級数展開すると

$$\arg f_{k'}(\Omega) = \arg f_k(\Omega) + (k'-k)\cdot s(\Omega) + O(k'-k)$$
$$s(\Omega) = \mathrm{grad}\left[\arg f_k(\Omega)\right] \qquad (s \ll d, l) \tag{18}$$

同じようにして

$$k' \simeq k + u\cdot(k'-k), \quad E' \simeq E + \hbar v\cdot(k'-k) = E + \hbar u v\cdot(k'-k) \tag{19}$$
$$u = \frac{v}{v}$$

これらを (17) の右辺に代入すると

$$\Psi_l^{(d)} \simeq \int A(k'-k)\, e^{-ik\cdot l}\, e^{-i(k'-k)\cdot l} \left(f_k\, e^{i(k'-k)s(\Omega)}\right)$$
$$\times \frac{1}{r} e^{i\left[(k+u\cdot(k'-k))r - (E t/\hbar + u v t\,(k'-k))\right]}\, dk'$$

$$= e^{-ik\cdot l} f_k(\Omega) \frac{e^{i[kr-(Et/\hbar)]}}{r} \int A(k'-k)\, e^{i(k'-k)\cdot[u(r-vt)+s-l]}\, dk'$$

$$\simeq e^{-ik\cdot l} f_k(\Omega) \frac{e^{i[kr-Et/\hbar]}}{r} \chi\left[u(r-vt)+s-l\right] \tag{20}$$

$l > d$ のとき

任意の時刻で $u(r-vt)+s-l$ は χ の値が無視される範囲

→ $\Psi_l^{(d)}$ は 0

$l < d$ のとき

球面 $r=vt$ の両面に l の厚みをつけた球殻の中では χ は無視できない

→ $\Psi_l^{(d)}$ は放射状に広がる散乱波束

以上から正面 $(\theta < \frac{d}{r})$ 以外では Ψ_l と $\Psi_l^{(d)}$ は完全に分離される

§6 断面積の計算

(散乱された粒子が計測される確率 $P_l(\Omega)\,d\Omega$)

=(計測器に入る波束を全体で積分)

=(立体角 $(\Omega, \Omega+d\Omega)$ のなかに粒子がある確率)

条件(8)を満たしていれば $\Psi_b^{(d)}$ だけが検出されるので

$t=T$ で衝突が終わるとして。

$$P_b(\Omega)=\int_0^\infty |\Psi_b^{(d)}(r,T)|^2 r^2 dr$$

$$=\int_0^\infty \Psi_b^* \Psi_b \cdot r^2 dr$$

$$=|f_b(\Omega)|^2\int_0^\infty |\chi(n(r-vT)+\rho-b)|^2 dr \qquad (21)$$

$vT \gg l$ なので変数変換

$$z=r-vT$$

をして、積分の下端を $-\infty$ までひろげると、

$$P_b(\Omega)=|f_b(\Omega)|^2\int_{-\infty}^{+\infty}|\chi(nz+\rho-b)|^2 dz$$

流束1の粒子ビームが入射すると、単位時間に面積要素 $(b, b+db)$

に入射する粒子は db 個

なので、$(\Omega, \Omega+d\Omega)$ 方向へ散乱される確率は $\sigma(\Omega)\delta(\Omega)=\int db\, P_b(\Omega)\delta\Omega$

$$\sigma(\Omega)=|f_b(\Omega)|^2\int_{-\infty}^{+\infty}dz\int db\,|\chi(nz+\rho-b)|^2$$

b の積分範囲は n と垂直

$P=nz+\rho-b$ と置き換えれば (10)式と一致するので

$$\sigma(\Omega)=|f_b(\Omega)|^2$$

§7 2粒子の衝突 実験室系と重心系

2つの粒子が相対距離に依存するポテンシャル $V(r)$ で衝突する場合

重心の運動と相対運動に分離できる。

《相対粒子》

質量 $m=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ を持ちポテンシャル $V(r)$ に依って運動する。

§2で断面積を定義したとき標的の運動は触れていない。

入射流束が標的に対する相対流束であることに留意すれば

§2と同じ過程でCM系の微分断面積を決めると

$$\sigma(\Omega)d\Omega = \sigma_1(\Omega)d\Omega_1 \qquad (22)$$

$$\sigma_{tot} \equiv \int \sigma(\Omega)d\Omega = \sigma_{1tot}$$

添字　なし　：　CM系

　　　1　：　lab系

lab系よりもCM系が有用な理由

・どの座標系においても入射粒子の標的に対する相対的な流束は同じ

・ポテンシャルが相対距離 r に依存してるのなら

そのポテンシャルに従った散乱の断面積は重心運動のエネルギー E_R には依らず、相対運動のエネルギー E_r に依る

→ シュレディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)\right]\psi(r) = E_r\psi(r)$$

はエネルギー E_r の固有解を持ち、

その漸近解は

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + f(\Omega)\frac{e^{ikr}}{r}$$

$E_r = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$,　$\boldsymbol{k} = \dfrac{m\boldsymbol{v}}{\hbar} = \dfrac{m_2\boldsymbol{k}_1}{M}$　　$\boldsymbol{k}_1$ は lab系の入射波数ベクトル

微分断面積は

$$\sigma(\Omega) = |f(\Omega)|^2$$

(22)から $\sigma(\Omega) = \sigma_1(\Omega)\dfrac{d\Omega_1}{d\Omega}$ なので $\dfrac{d\Omega_1}{d\Omega}$ を知りたい。

10-3図のようにおけば

$$\cos\theta_1 = \frac{\cos\theta + \tau}{(1+2\tau\cos\theta+\tau^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (24)$$

$$\tau = \frac{V}{v_1} = \frac{m_1}{m_2} \qquad (25)$$

1) $\tau < 1$ $(m_1 < m_2)$

$\frac{\theta}{2} < \theta_1 < \theta$ で θ_1 は0からπまで単調増加

ii) $\tau > 1$ $(m_1 > m_2)$

θ_1は0から $\theta_{1max} = \mathrm{Arcsin}(1/\tau)$ まで増加しその後減少
→ あるθ_1にθが2つ対応 θの小さい方とθ_1の大きい方が対応

(24)から

$$\frac{d(\cos\theta_1)}{d(\cos\theta)} = \frac{1+\tau\cos\theta}{(1+2\tau\cos\theta+\tau^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d\Omega_1}{d\Omega} = \left|\frac{d(\cos\theta_1)}{d(\cos\theta)}\right|$$ なので

$$\sigma_1(\Omega_1) = \sigma(\Omega)\frac{d\Omega}{d\Omega_1} = \frac{(1+2\tau\cos\theta+\tau^2)^{3/2}}{|1+\tau\cos\theta|}|f(\Omega)|^2 \qquad (26)$$

II. 中心力ポテンシャルによる散乱・位相のずれ

§8. 部分波への分解・位相のずれによる方法

定常散乱波の漸近式を決めるため、シュレディンガー方程式を球面座標でとく。
kの方向が回転対称軸なのでψとfはφに依らない
これらをルジャンドル多項式で級数展開して、

$$\psi(r,\theta) = \sum_l \frac{y_l(r)}{r} P_l(\cos\theta) \qquad (27)$$

$$f(\theta) = \sum_l f_l P_l(\cos\theta) \qquad (28)$$

y_lは動径方程式（ここではシュレディンガー方程式を動径成分だけ分離）

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\varepsilon - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\right]y_l = 0 \qquad (29)$$

$$\varepsilon = k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E, \qquad U(r) = \frac{2m}{\hbar^2}V(r)$$

の正則な解で漸近式をもつ

$$y_l \underset{r\to\infty}{\sim} a_l \sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l + \delta_l\right) = \frac{a_l}{2i}\left((-i)^l e^{i\delta_l} e^{ikr} - i^l e^{-i\delta_l} e^{-ikr}\right) \qquad (30)$$

平面波の級数展開

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_l (2l+1)\, i^l j_l(kr) \cdots$$

$j_l(kr)$は球Bessel関数

を用いて ψ の漸近式を級数展開すると

$$\psi_r \sim e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} = \sum_l \left((2l+1)i^l j_l(kr) + f_l \frac{e^{ikr}}{r}\right) P_l(\cos\theta)$$

$j_l(kr)$ の漸近形

$$j_l(kr) \sim \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l\right) = \frac{1}{2ikr}\left((-i)^l e^{ikr} - i^l e^{-ikr}\right)$$

を用いると

$$r\psi_r \sim r\left(\sum_l \left((2l+1)i^l \frac{1}{2kr}\left((-i)^l e^{ikr} - i^l e^{-ikr}\right) + f_l \frac{e^{ikr}}{r}\right)\right) P_l(\cos\theta)$$

$$= \sum_l \left((-1)^{l+1}\frac{2l+1}{2ik} e^{-ikr} + \left(\frac{2l+1}{2ik} + f_l\right) e^{ikr}\right) P_l(\cos\theta)$$

(30) 式と比べると　($y_l(r)$ は (27) から $r\psi_r$ にあたる).

$$a_l = i^l \frac{2l+1}{k} e^{i\delta_l}, \qquad f_l = \frac{2l+1}{k} e^{i\delta_l}\sin\delta_l$$

なので (28)式から

$$f(\theta) = \lambda\!\!\!^{-} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin\delta_l \, P_l(\cos\theta) \tag{31}$$

$\lambda\!\!\!^{-} = 1/k$.

$\frac{y_l}{r}$ の l の成分の漸近式と平面波 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ の l 成分を比べると

$$\frac{y_l}{r} \sim \frac{2l+1}{2ikr}\left((-1)^{l+1} e^{-ikr} + e^{2i\delta_l} e^{ikr}\right)$$

$$(2l+1)i^l j_l(kr) \sim \frac{2l+1}{2ikr}\left((-1)^{l+1} e^{-ikr} + e^{ikr}\right)$$

どちらも入射波と散乱波の重ね合わせ.

→ $\frac{y_l}{r}$ のほうは散乱波が $e^{2i\delta_l}$ だけずれている

→ 散乱ポテンシャルがずらす

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = \lambda\!\!\!^{-2} \sum_{l l'} (2l+1)(2l'+1) \sin\delta_l \sin\delta_{l'} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \tag{32}$$

角 (θ, φ) について積分すると ルジャンドル多項式の 直交規格化関係

$$\int_{-1}^{+1} P_l P_{l'}\, d\cos\theta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

より

$$\sigma_{tot} = 4\pi ƛ^2 \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l \quad (33)$$

角運動量 l に対する寄与は

$$\sigma_l = 4\pi(2l+1)ƛ^2\sin^2\delta_l \quad (34)$$

(34) から

$$\sigma_l \leqq 4\pi(2l+1)ƛ^2 \quad (35)$$

で 等号成立は

$$\delta_l = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{のとき}$$

§ 9 衝突の半古典的表現. 衝突パラメータ

古典粒子の衝突.

$r > r_0$ のとき $U(r)=0$ のような ポテンシャル下で

$b < r$ であるか $b > r$ であるかで 入射粒子が偏向を受けるか否かが決まる.

→ 角運動量 L が十分小さいものが受ける.

量子論

$lƛ \gg r_0$ のとき. 部分波 l の寄与 σ_l は無視できる

$lƛ < r_0$ のとき σ_l は 0 と $4\pi(2l+1)ƛ^2$ のあいだの全ての値

→ 古典的粒子において 衝突パラメータ が $lƛ$ と $(l+1)ƛ$ のあいだにある粒子との類似性

入射波の 角運量 l の部分波の項の動径成分は $j_l(r/ƛ)$ に比例

→ 球殻 $(r, r+dr)$ に存在する相対確率密度は $r^2 j_l^2(r/ƛ)$

$r > \sqrt{l(l+1)}ƛ$ では 非常に小さく

$r < \sqrt{l(l+1)}ƛ$ では 0 と 1 の間を振動

理論ゼミ メシア 10章 続き (木田)

III 有限な半径のポテンシャル

§10. 位相のずれと対数導関数の関係

$r > r_0$ のとき $V(r) = 0$

を仮定して

動径方程式 (29) を満たす y_l の対数導関数が点 r_0 でとる値を γ_l

$$\gamma_l = \left. \frac{r\frac{dy_l}{dr}}{y_l} \right|_{r=r_0} \tag{36}$$

(ここでの定義は y_l の r 微分に r をかけているところが普通と違う)

・第3章 §8 から γ_l は エネルギーの関数として単調減少

・γ_l と δ_l は $V(r)$ に依らない関係を持つ

y_l について $a_l = 1$ となるよう規格化されているとする

$$y_l \underset{r\to\infty}{\sim} \sin\left(kr - \frac{l}{2}\pi + \delta_l\right) \tag{37}$$

よって $r > r_0$ では

$$y_l = kr\left[\cos\delta_l \cdot j_l(kr) + \sin\delta_l \cdot n_l(kr)\right]$$

($r \to \infty$ で 球Bessel関数と球Neumann関数の極限をとって角度を合成すれば (37) 式)

ここからは $\xi = kr$ と変数変換し

$$u_l^{(\pm)}(\xi) = \xi\left[n_l \pm i j_l(\xi)\right] = \xi h_l^{(\pm)}(\xi)$$

を導入する。

$$h_l^{(\pm)}(\rho) = (R_l \pm i S_l)\frac{e^{\pm i\rho}}{\rho} \qquad \text{(付録 B (49) 式)}$$

から、$u_l^{(+)}$ は出ていく波 $u_l^{(-)}$ は入ってくる波に対応

$u_l^{(\pm)}$ の ロンスキアンは (付録B (57) 参照)

$$u_l^{(-)}\frac{d}{d\xi}u^{(+)} - u^{(+)}\frac{d}{d\xi}u^{(-)} = 2i \tag{38}$$

δ_ℓ が2つの項で表される

・第1項 τ_ℓ : ポテンシャルの形に依らない

・第2項 ρ_ℓ : 〃 に依る（$\hat{g}_\ell$の項があるため）

(39), (41)〜(43)式により

$$y_\ell(r_0) = \frac{\lambda i \rho_\ell}{\sqrt{v_\ell}}$$

§11. 低エネルギー（$\lambda \to \infty$）における位相のずれの挙動

付録B (52) から $kr_0 \ll \ell$（エネルギーがごく低い or 角運動量が大きい）

での δ_ℓ の挙動が分かる

$kr_0 \ll \ell$ で (41)から

$$v_\ell = |u_\ell^{(+)}(kr_0)|^2 = (kr_0)^2 |n_\ell(kr_0) + i j_\ell(kr_0)|^{-2}$$

$$\simeq (kr_0)^{-2}\left[\left((2\ell-1)!!\left(\frac{1}{kr_0}\right)^{\ell+1}\right)^2 + \left(\frac{(kr_0)^\ell}{(2\ell+1)!!}\right)^{-2}\right]$$

$kr_0 \gg \ell$ から j_ℓ の項を落とすと

$$v_\ell \simeq \frac{(kr_0)^{2\ell}}{[(2\ell-1)!!]^2}$$

これを用いて

$$\tau_\ell \simeq -\frac{(kr_0)^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!!\,(2\ell-1)!!} \qquad \mathrm{Re}\, g_\ell^{(+)} \simeq -\ell + O(k^2 r_0^2) \tag{45}$$

$\lim_{kr_0 \to 0} g_\ell = \hat{g}_\ell$ とすると、$\hat{g}_\ell \neq -\ell$

$$\delta_\ell \underset{k\to 0}{\sim} \frac{\ell+1-\hat{g}_\ell}{\ell+\hat{g}_\ell}\,\frac{(kr_0)^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!!\,(2\ell-1)!!} \tag{46}$$

より δ_ℓ は $k^{2\ell+1}$ のように0に近づく

$\delta_\ell \ll 1$ なら、$f_\ell = \frac{2\ell+1}{k} e^{i\delta_\ell} \sin\delta_\ell$ より f_ℓ は $\frac{\delta_\ell}{k}$ に比例し $k^{2\ell}$ のように0に近づく

→ エネルギーがごく低い極限（$k \ll 1$）では断面積が等方性を持つ

↳ (34)から σ_0 を除いて σ_ℓ は $k^{4\ell}$ のように0に近づき、σ_0 は0でない定数に近づく

<u>散乱半径</u>：a

$$a = -\lim_{k\to 0} f_0 = -\lim \frac{\delta_0}{k} = \left(1 - \frac{1}{\hat{g}_0}\right) r_0 \qquad (47)$$

エネルギー0の動径方程式

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - U(r)\right] y_0 = 0$$

を解くと a が求められる

→ y_0 の漸近線が r 軸を横ぎる点の横座標

この極限では

$$\sigma_{tot} = \sigma_0 = 4\pi a^2$$

$\hat{g}_\ell = -\ell$ のとき

エネルギーが0に近づくと f_ℓ は $k^{2\ell-2}$ のように振舞う

↳ ($\ell=0$ は例外で $\hat{g}_0 = 0$ は $f_0 = i/k$ を意味する)

このときは

状態 ℓ において0エネルギーに共鳴がある

と言う。

S共鳴 ($\ell=0$)

a は無限大で σ_{tot} は $1/E$ のように無限大に近づく

P共鳴 ($\ell=1$)

$f(\theta)$ は $-a + l_1 \cos\theta$ に近づく

断面積は有限だが等方性はない

$\ell \geq 2$ では

エネルギー0のときの断面積の極限に影響はない

§12. 高位の部分波・級数の収束($l\to\infty$)

lが十分大きいとき

$$k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}$$

は $(0,r_0)$ において常に負

→ (29)式の解 y_l は $(0,r_0)$ で「指数関数的挙動」を示し g_lは正である

さらに $l \gg kr_0$ ならば (45)を使うことができ $g_l \doteqdot -l$ なので (46)と同様に

$$\delta_l \underset{l\to\infty}{\sim} \frac{l+1-g_l}{l+g_l}\frac{(kr_0)^{2l+1}}{(2l-1)!!\,(2l+1)!!} \tag{48}$$

となる。

§13. 剛体球による散乱

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & (r<r_0) \\ 0 & (r>r_0) \end{cases}$$

というポテンシャルの下では§10の式は簡単になる

波動関数は球の表面で0

→ どんなlでも $y_l(r_0)=0$ $(g_l=-\infty)$

→ $\rho_l = 0$ (44)式より

→ $\delta_l = \tau_l = \arg u_l^{(-)}$ (49)

したがって

$$\sigma_l = \frac{4\pi(2l+1)}{k^2}\frac{j_l^2(kr_0)}{j_l^2(kr_0)+n_l^2(kr_0)} \tag{50}$$

$l=0$ のとき

$$\sigma_0 = 4\pi r_0^2\left(\frac{\sin kr_0}{kr_0}\right)^2$$

エネルギーが低ければ§11のように微分断面積は等方性で

$$\lim_{k\to 0}\sigma_{tot} = \lim_{k\to 0}\sigma_0 = 4\pi r_0^2 \tag{51}$$

($a=r_0$なので)

エネルギーが増すと、高位の部分波の寄与が大きくなる
　→ 散乱の非等方性が増す。

さらにエネルギーがきわめて大きくなると lの大きな値に対するBessel関数の漸近的性質

$$J_l(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2l+1}{4}\pi\right)$$
$$Y_l(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{2l+1}{4}\pi\right)$$

を用いて

$$\sigma(\Omega) \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{4} r_0^2 \left(1 + \cot^2\frac{\theta}{2} J_1^2(kr_0 \sin\theta)\right) \quad (52)$$

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{tot} = 2\pi r_0^2. \quad (53)$$

(53)の導出

$j_l(\xi)$と$n_l(\xi)$の挙動から

$$g_l(\xi) = \frac{j_l^2(\xi)}{j_l^2(\xi) + n_l^2(\xi)}$$

の挙動を導くと

$\xi = 0$において $\xi^{4l+2}/[(2l+1)!!(2l-1)!!]^2$ のように0になり（付録B (52)）

ξが増すと $\xi = l$の近くまで規則的に増加。

それ以降は

$$g_l(\xi) \underset{\xi\to\infty}{\sim} \sin^2\left(\xi - \frac{1}{2}l\pi\right) \quad (54)$$

にしたがうため、

$$\sigma_{tot} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, g_l(kr_0)$$

は、$l > kr_0$の項は無視 $l < kr_0$の項は$g_l(kr_0)$を(54)でおきかえる

$$\sigma_{tot} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{kr_0} (2l+1) \sin^2\left(kr_0 - \frac{1}{2}l\pi\right)$$

$$= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\frac{1}{2}kr_0} \left((4l+1)\left(\sin^2(kr_0 - l\pi) + \cos^2(kr_0 - l\pi)\right) + 2\cos^2(kr_0 - l\pi)\right)$$

$$= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\frac{1}{2}kr} \left(4l+1+2\cos^2 kr_0\right)$$