DEPARTMENT OF PHYSICS
KYOTO UNIVERSITY

P4 理論ゼミ 2011.5.31. 古野

§3.3 Breit - Wigner の公式

十分低速な中性子(運動エネルギーEが1MeV程度)が原子核に衝突して、γ線放出や弾性散乱が起こる反応の断面積は以下で与えられる。

Breit - Wigner の1準位公式

・γ線放射 : $\sigma_{rad} = \pi \bar{\lambda}^2 \dfrac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(E-E_r)^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_n + \Gamma_\gamma)^2}$ (1)

・弾性散乱 : $\sigma_{el} = \pi \bar{\lambda}^2 \left| \dfrac{\Gamma_n}{E-E_r + \frac{i}{2}(\Gamma_n + \Gamma_\gamma)} + 2e^{ikR}\sin kR \right|^2$ (2)

$2\pi\bar{\lambda}$: 入射中性子の de Broglie 波長 ($\bar{\lambda} \equiv \frac{\lambda}{2\pi}$)

Γ_n, Γ_γ : 複合核準位のエネルギー幅

R : 標的核の半径

E_r : 複合核の励起エネルギー(共鳴エネルギーと呼ぶ)

以下ではこの公式の導出を行う。

中性子は十分低速なので、遠心ポテンシャルを越えられないように、$l=0$の場合のみを考える

すると §2.6 の式(20),(21)より、弾性散乱の全断面は

$$\sigma_{el} = \int \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} d\Omega = 4\pi |\underbrace{f(\theta)}_{\text{散乱振幅}}|^2 = \frac{\pi}{k^2} |e^{2i\delta} - 1|^2 \qquad (3)$$

(δ : 散乱による s 波の位相のずれ)

定理

$e^{2i\delta} \equiv \eta$ とおくと $|\eta|^2 = 1$ (5) $\Longleftrightarrow$ 弾性散乱のみが起こる

☺ 散乱における波動関数の $r \to \infty$ での漸近形は

$$\psi(\mathbf{r}) = \underbrace{e^{ikz}}_{\text{入射平面波}} + f(\theta) \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{外向き球面波}}$$

であった。

§2.6 の式(17)から、$f(\theta)$のうち、s波($l=0$)の部分を抜き出すと、$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ より

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\{\exp(2i\delta) - 1\} = \frac{1}{2ik}(\eta - 1) \qquad (6)$$

$l=0$ の平面波は　$e^{ikz} = j_0(kr) = \frac{1}{kr}\sin(kr)$

よって　$l=0$ の波動関数は

$$\psi(r) = \frac{\sin(kr)}{kr} + \frac{e^{ikr}}{2ikr}(\eta-1) = -\underbrace{\frac{e^{-ikr}}{2ikr}}_{\text{収束波}} + \eta\underbrace{\frac{e^{ikr}}{2ikr}}_{\text{発散波}} \quad (6)$$

$\left(\sin(kr) = \frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{2i}\right)$

半径 r の球面の外側から単位時間に流れこむ粒子数は

確率密度　$S_r \equiv -\frac{\hbar}{M}\mathrm{Im}(\phi^*\partial_r\phi)$ 収束波　として（マイナス符号は r が負の方向に流れるため）

$dN_1 = S_r \cdot 4\pi r^2 = \pi \lambda\!\!\!^{-2} v$　（v：粒子速度）　（※1）→ おまけで計算

同様に球面から流れ出す粒子数は、発散波の部分を考えて

$dN_2 = |\eta|^2 \pi \lambda\!\!\!^{-2} v$

弾性散乱は、dN_1 と dN_2 が等しいので　$|\eta|^2=1$　となる　☒

非弾性散乱では　$|\eta|^2<1$　(8)　で、そのような過程の反応断面積は

反応した粒子数が　$(1-|\eta|^2)\pi\lambda\!\!\!^{-2} v$　より

$$\sigma_r = \pi\lambda\!\!\!^{-2}(1-|\eta|^2) \quad (9)$$

◎ σ_{el} に共鳴ピークが現れることをみる。

Schrödinger 方程式の解の、$l=0$ の部分波は、§2.6 の式(12) より

$$\phi(r) = A_0 R_0(r) Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp(i\delta_0)\frac{1}{kr}\sin(kr+\delta_0)\times\sqrt{4\pi} = \frac{1}{kr}e^{i\delta}\sin(kr+\delta)$$

これを $\frac{1}{kr}u(r)$ とおくと　　$r \geq R$ で

$$\begin{cases} u(r) = e^{i\delta}\sin(kr+\delta) \\ \frac{du}{dr} = ke^{i\delta}\cos(kr+\delta) \end{cases} \quad (10)$$

$$g(r) \equiv \frac{r\frac{du}{dr}}{u(r)} = \frac{kr\,e^{i\delta}\cos(kr+\delta)}{e^{i\delta}\sin(kr+\delta)} \quad (11)$$　とおくと

$g(R) = kR\cot(kR+\delta)$　で、　δ について解くと、（下では逆算して確認）

$$e^{-2ikR}\left(1+\frac{2ikR}{g(R)-ikR}\right) = e^{-2ikR}\left\{1+\frac{2i\sin(kR+\delta)}{\cos(kR+\delta)-i\sin(kR+\delta)}\right\}$$

$$= e^{-2ikR}\left\{1+\underline{2i\sin(kR+\delta)}\,e^{i(kR+\delta)}\right\} = e^{-2ikR}\left[1+\left\{\underline{e^{i(kR+\delta)}-e^{-i(kR+\delta)}}\right\}e^{i(kR+\delta)}\right] = e^{2i\delta} = \eta$$

(12)

$g(R) = g(E)$ として，（$k \leftrightarrow E$のつながりより）　式(3)に代入すると

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2}\left|e^{2i\delta} - 1\right|^2 = \pi \lambda\!\!\!^{-2}\left|2ie^{ikR}\sin kR - \frac{2ikR}{g(E) - ikR}\right|^2 \quad (13) \qquad (*2)$$

この式は $g(E) = 0$ 付近にピークを持つ．このときの E を E_r とおいて，
E_r 付近で $g(E)$ を展開すると

$$g(E) = \underbrace{g(E_r)}_{0} + g'(E_r)(E - E_r) + O((E-E_r)^2) \quad (14)$$

すると
$$\frac{2ikR}{g(E) - ikR} \simeq \frac{\frac{2ikR}{g'(E_r)}}{E - E_r - i\frac{kR}{g'(E_r)}}$$

$$\Gamma_n \equiv -\frac{2kR}{g'(E_r)}$$ とおくと　式(12)より

$$\eta = e^{-2ikR}\left(1 - \frac{i\Gamma_n}{E - E_r + \frac{i}{2}\Gamma_n}\right) \quad (16)$$

γ 放射のエネルギー幅 Γ_γ を導入するには．
$E_r \to E_r - i\frac{\Gamma_\gamma}{2}$　(17)　とすればよい　（§3.4 参照）

すると
$$\eta \to e^{-2ikR}\left\{1 - \frac{i\Gamma_n}{E - E_r + \frac{i}{2}(\Gamma_n + \Gamma_\gamma)}\right\} \quad (18)$$

$$\sigma_{el} = \pi \lambda\!\!\!^{-2}\left|2e^{ikR}\sin kR + \frac{\Gamma_n}{E - E_r + \frac{i}{2}(\Gamma_n + \Gamma_\gamma)}\right|^2 \quad (19)$$

おそい中性子の非弾性散乱は必ず γ 放射を起こすので．式(9)より

$$\sigma_{rad} = \sigma_r = \pi \lambda\!\!\!^{-2}\frac{\Gamma_n\Gamma_\gamma}{(E-E_r)^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_n + \Gamma_\gamma)^2} \quad (20) \qquad (*3)$$

となり．Breit - Wigner の公式が証明された．　(q.e.d)

§3.4 おも〜い中性子と原子核との相互作用

Bleit-Wigner の公式に出てきた, $g(E)$, E_r, Γ_n, Γ_γ 等のパラメータの理論的計算をここでは行う.

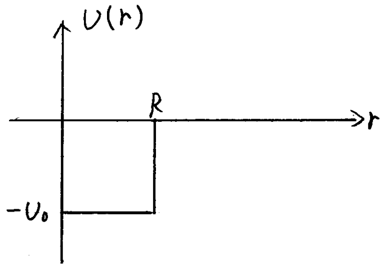
標的核 + 入射中性子のハミルトニアンを

$$H = K(r) + H_T(\xi) + V(\mathbf{r}, \xi) \qquad (1)$$ とおく.

- $K(r) = -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)$ は $l=0$ 中性子の運動エネルギー
- $H_T(\xi)$: 標的核のハミルトニアン
- $V(\mathbf{r}, \xi)$: 中性子と標的核間の相互作用ポテンシャル
- $\mathbf{r}$ は中性子の位置ベクトル, ξ は標的核の内部自由度 (スピン, etc)

H を次のように書きかえる:

$$\begin{cases} H = K(r) + U(r) + H_T(\xi) + H_{int}(\mathbf{r}, \xi) & (2) \\ H_{int}(\mathbf{r}, \xi) \equiv V(\mathbf{r}, \xi) - U(r) & (3) \end{cases}$$



$$U(r) = \begin{cases} 0 & (r > R) \\ -U_0 & (r < R) \end{cases}$$: 標的核が基底状態での V の期待値

$\Downarrow$

H_{int} の基底状態での期待値は 0 ; $\langle \chi_0 | H_{int} | \chi_0 \rangle = 0$ ⋯ (a)

つまり $H_{int}(\mathbf{r}, \xi)$ は入射中性子による標的核の励起を誘発する演算子

この励起は主に標的核表面で起こる (§3.5) $\Longleftrightarrow$ $H_{int}(\mathbf{r}, \xi)$ は $r = R$ でのみ 0 以外の値をもつ.

複合核形成があるときの系全体の波動関数を次のようにおく

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}, \xi) = \underbrace{\frac{u(r)}{kr}}_{\text{入射中性子}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \chi_0(\xi)}_{\text{標的の基底状態}} + \underbrace{\sum_i C_i \Phi_i(\mathbf{r}, \xi)}_{\text{励起された複合核}} \qquad (4)}$$

- 標的核の基底状態のエネルギーを W_0 とすると $\{H_T(\xi) - W_0\}\chi_0(\xi) = 0$ ⋯ (6)
- 基底状態と複合核の状態は直交する:

$$\int \chi_0^*(\xi) \Phi_i(\mathbf{r}, \xi) d\xi = 0 \qquad (5)$$

未知量 C_i（複合核の割合）と $u(r)$（散乱中性子の状態）は 全系の Schrödinger 方程式

$$H\Phi(\mathbf{r},\xi) = W\Phi(\mathbf{r},\xi) \qquad (6)$$

から決定される.

入射中性子の エネルギー を E とすると, エネルギー保存則 より $\quad W = W_0 + E \qquad (7)$

(6) に (4) を代入すると

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) + H_T(\xi) + U(r) + H_{int}(\mathbf{r},\xi) - W_0 - E\right]$$

$$\times\left[\frac{u(r)}{kr}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\chi_0(\xi) + \sum_i C_i\Phi_i(\mathbf{r},\xi)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\chi_0(\xi)\frac{1}{kr\sqrt{4\pi}}\left\{-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2u}{dr^2} + (U-E)u\right\} + H_{int}\frac{u(r)}{kr\sqrt{4\pi}}\chi_0(\xi) + \sum_i C_i(H-W)\Phi_i = 0 \qquad (8)}$$

この両辺に 左から $\chi_0^*(\xi)$ をかけて ξ で積分すると $\quad \int|\chi_0|^2 d\xi = 1$ と (a) の $\langle\chi_0|H_{int}|\chi_0\rangle = 0$ より

$$\frac{1}{kr\sqrt{4\pi}}\left\{-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2u}{dr^2} + (U-E)u\right\} + \sum_i C_i\int d\xi\,\chi_0^*\{\underbrace{K+U+H_T}_{(2)\text{より}}+H_{int} - W\}\Phi_i = 0 \qquad (*)$$

H_T のエルミート性より $\chi_0^*(\xi)H_T(\xi) = W_0\chi_0^*(\xi)$ なので

$$(\text{第2項}) = \sum_i C_i\{K(r)+U(r)+W_0-W\}\underbrace{\int\chi_0^*(\xi)\Phi_i(\xi)d\xi}_{(5)\text{より}\,0} + \sum_i C_i\int\chi_0^* H_{int}\Phi_i\,d\xi$$

$$= \sum_i C_i\int\chi_0^*(\xi)H_{int}(\mathbf{r},\xi)\Phi_i(\xi)d\xi$$

したがって (*) は

$$\boxed{\frac{1}{kr\sqrt{4\pi}}\left\{-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2u}{dr^2} + (U-E)u\right\} + \sum_i C_i\int\chi_0^*(\xi)H_{int}(\mathbf{r},\xi)\Phi_i(\xi)d\xi = 0 \qquad (9)}$$

次に (8) の 左から Φ_j^* をかけて ξ で積分すると 第1項は (5) より 0 となり

$$\boxed{\frac{u(r)}{kr\sqrt{4\pi}}\int\Phi_j^*(\mathbf{r},\xi)H_{int}(\mathbf{r},\xi)\chi_0(\xi)d\xi + \sum_i C_i\left\{\int\Phi_j^* H\Phi_i d\xi - W\delta_{ij}\right\} = 0 \qquad (10)}$$

$$\left(\int\Phi_j^*\Phi_i d\xi = \delta_{ij}\right)$$

(9) で $r \neq R$ とすると $H_{int}(\mathbf{r},\xi) = 0$ となるので

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2u}{dr^2} + \{U(r)-E\}u = 0 \qquad \text{for } r\neq R \qquad (11)$$

(9)を $r=R-\Delta$, $r=R+\Delta$ の球殻内で積分して $\Delta\to 0$ とすると
$u(r)$ は $r=R$ で連続な関数としているから $(V(r)-E)u$ の積分は0になる
H_{int} は $r=R$ 以外で0だから 第2項は全空間で積分しても同じ

$$\therefore -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{4\pi R^2}{kR\sqrt{4\pi}}\left\{\left(\frac{du}{dr}\right)_{R+0}-\left(\frac{du}{dr}\right)_{R-0}\right\}+\sum_i C_i\iint d\mathbf{r}\,d\xi\ \chi_0^*\ H_{int}\,\Phi_i=0 \qquad (12)$$

$$H_{0i}\equiv\frac{R^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\iint\chi_0^*(\xi)\,H_{int}(\mathbf{r},\xi)\,\Phi_i(\mathbf{r},\xi)\,d\mathbf{r}\,d\xi \qquad (13)\quad として$$

(基底状態と励起状態ではさんだ H_{int} の行列要素)

対数導関数を

$$g(E)\equiv R\left(\frac{\frac{du}{dr}}{u}\right)_{R+0},\quad g_{pot}(E)\equiv R\left(\frac{\frac{du}{dr}}{u}\right)_{R-0} \qquad (14)\quad とおくと\ (12)は$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{4\pi R^2}{kR^2\sqrt{4\pi}}u(R)\left\{R\left(\frac{u'}{u}\right)_{R+0}-R\left(\frac{u'}{u}\right)_{R-0}\right\}+\sum_i C_i\iint\chi_0^*\,H_{int}\Phi_i\,d\mathbf{r}\,d\xi=0$$

両辺に $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}R^{-\frac{3}{2}}$ をかけると

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{4\pi R^{\frac{1}{2}}}{R^2\sqrt{4\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u(R)\left\{g-g_{pot}\right\}+\sum_i C_i'\iint\chi_0^*\,H_{int}\Phi_i\,d\mathbf{r}\,d\xi=0\quad (C_i'\equiv kC_i)$$

$$\therefore\ \boxed{-\sqrt{\frac{R}{2}}\,\frac{\hbar^2}{MR^2}u(R)\left\{g(E)-g_{pot}(E)\right\}+\sum_i C_i'H_{0i}=0 \qquad (15)}$$

これが対数導関数を求める式になる

また (10)を $\mathbf{r}$ で積分すると、第1項は $r=R$ でのみ値を持つので

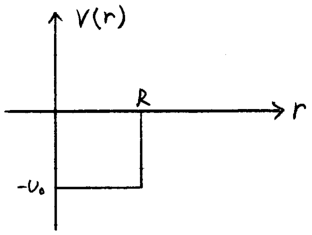
$$\boxed{\sqrt{\frac{R}{2}}\,u(R)H_{j0}+\sum_i C_i'(H_{ji}-\delta_{ij}W)=0 \qquad (16)}\quad\Rightarrow\ C_i' が求まる$$

ただし

$$\begin{cases}H_{ji}\equiv\iint\Phi_j^*\,H\,\Phi_i\,d\mathbf{r}\,d\xi\\ H_{j0}\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}R^{-\frac{3}{2}}\iint\Phi_j^*\,H_{int}\,\chi_0\,d\mathbf{r}\,d\xi\end{cases}\qquad (17)$$

((i,j) 成分は H を Φ ではさんで積分し、 $(i,0)$ 成分は H_{int} を Φ, χ_0 ではさんで積分)

井戸型ポテンシャルだと　$r \leq R$ で



$$g_{pot} = KR\cot KR$$ で g_{pot} は求まる.

$$K \equiv \sqrt{k^2 + \frac{2MU_0}{\hbar^2}}$$

☺ Shrödinger 方程式　$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2u}{dr^2} - U_0\right)\psi = E\psi$ より

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \left(-\frac{2ME}{\hbar^2} - \frac{2MU_0}{\hbar^2}\right)\psi = -\left(k^2 + \frac{2MU_0}{\hbar^2}\right)\psi$$

$\therefore$ $\psi = A\sin Kr$ より $g_{pot} = R\left(\frac{u'}{u}\right)_{r=R-0} = KR\cot KR$ ▨

求まった C_i', g_{pot} を (15) に入れると $g(E)$ も求まる.

$\Phi_i(\mathbb{r}, \xi)$ を H の固有関数に選んでおくと, 固有値を W_i とおいて (17) より

$$H_{ji} = \iint d\mathbb{r}d\xi\, \Phi_j^* H\Phi_i = H_i \iint d\mathbb{r}d\xi\, \Phi_j^*\Phi_i = W_i\delta_{ij} \qquad (19)$$

これを (16) に代入して

$$C_j' = \frac{\sqrt{\frac{R}{2}}\, u(R) H_{j0}}{W - W_j} \qquad (20)$$

で C_j' が求まり.

これを (15) に代入して

$$g(E) = g_{pot}(E) + \sum_i \frac{MR^2}{\hbar^2}\frac{|H_{0i}|^2}{W - W_i} = g_{pot}(E) + \sum_i \frac{MR^2}{\hbar^2}\frac{|H_{0i}|^2}{E - E_i} \qquad (21)$$

($W = W_0 + E$, $E_i \equiv W_i - W_0$: 複合核の励起エネルギー)

エネルギー準位 E_i の平均間隔 D が十分大きく,

$$|g_{pot}(E)| \gg \frac{MR^2}{\hbar^2}\frac{|H_{0i}|^2}{D} \qquad (22)$$

のとき

$E \sim E_i$ のとき, (21) は i の項が他の項に比べて十分大きく

$$\boxed{g(E) \simeq g_{pot}(E) + \frac{MR^2}{\hbar^2}\frac{|H_{0i}|^2}{E - E_i} \qquad (23)}$$

としてよい

§3.3 の (13) より, $g(E) = 0$ のとき σ_{el} は急激に増加する. このとき (23) で $g_{pot}(E)$ を $g_{pot}(E_i)$ として, 共鳴エネルギー E_r は.

$$\boxed{E_r \simeq E_i + \frac{MR^2}{\hbar^2}\frac{|H_{0i}|^2}{g_{pot}(E_i)} \qquad (24)}$$

(23)を E で微分して、

$$g'(E) = -\frac{MR^2}{\hbar^2}|H_{0i}|^2\frac{1}{(E-E_i)^2}$$ ($g_{pot}(E) = g_{pot}(E_i)$ として E 依存性を消した)

$$\therefore\ g'(E_r) = -\frac{MR^2}{\hbar^2}|H_{0i}|^2\frac{1}{\left|-\frac{MR^2}{\hbar^2}\frac{|H_{0i}|^2}{g_{pot}(E_i)}\right|^2} = -\frac{\hbar^2}{MR^2}\frac{g_{pot}(E_i)^2}{|H_{0i}|^2}$$

§3.3 の (15) より

$$\boxed{\Gamma_n = -\frac{2kR}{g'(E_r)} = 2kR\frac{MR^2}{\hbar^2}\frac{|H_{0i}|^2}{|g_{pot}(E_r)|^2} \qquad (25)}$$

以上で §3.3 で導入された $g(E)$, E_r, Γ_n が求まった.

☆ §3.3 の(17)で $E_r \rightarrow E_r - \left(\frac{i}{2}\right)\Gamma_\gamma$ としたことについて.

これは (24), (21) によって

$E_i \rightarrow E_i - \frac{i}{2}\Gamma_\gamma$ or $W_i \rightarrow W_i - \frac{i}{2}\Gamma_\gamma$ とすることと同じ

複合核状態の時間発展は

$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}W_i t\right)$ で与えられるので. 上の置きかえによって時間発展は

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}W_i t\right)\exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\Gamma_\gamma t\right) \qquad (26)$$ と変更される.

よって 固有関数の2乗 (存在確率) は 時間と共に

$$\exp\left(-\frac{\Gamma_\gamma}{\hbar}t\right) \qquad (27)$$ で減少

これは γ 放射による単位時間当たりの崩壊確率が $\frac{\Gamma_\gamma}{\hbar}$ であることを意味する

$E = E_r$ (共鳴エネルギー) の時では, §3.3 の (1), (2) より

$$\begin{cases} \sigma_{el} = 4\pi\lambda\!\!\!^{-2}\dfrac{\Gamma_n}{\Gamma_n+\Gamma_\gamma}\cdot\dfrac{\Gamma_n}{\Gamma_n+\Gamma_\gamma} & (28) \\ \sigma_{rad} = 4\pi\lambda\!\!\!^{-2}\dfrac{\Gamma_n}{\Gamma_n+\Gamma_\gamma}\cdot\dfrac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_n+\Gamma_\gamma} & (29) \end{cases}$$

(第2項は無視)

これらより、中性子が入射して複合核が形成される確率が $4\pi\lambda\!\!\!^{-2}\frac{\Gamma_n}{\Gamma_n+\Gamma_\gamma}$ で
その後に中性子あるいはγ線が放出される確率がそれぞれ
$\frac{\Gamma_n}{\Gamma_n+\Gamma_\gamma}$, $\frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_n+\Gamma_\gamma}$ であると解釈できる

複合核理論では
(a). 入射粒子は標的核表面でただちに融合して複合核をつくる
(b) 複合核の形成とその崩壊は独立しているとみなせる
という2点を仮定したが、そのどちらにも当てはまらないような実験データが出現
→ §4.5, §4.6.

おまけ：途中の計算

(※1)

収束波は $\phi = -\frac{e^{-ikr}}{2ikr}$ より

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{e^{-ikr}}{2ikr}\right) = \left(\frac{e^{-ikr}}{2ikr^2} + \frac{e^{-ikr}}{2r}\right)$$

$$\therefore \phi^* \partial_r \phi = \frac{e^{+ikr}}{2ikr}\left(\frac{e^{-ikr}}{2ikr^2} + \frac{e^{-ikr}}{2r}\right) = -\frac{1}{4k^2r^3} + \frac{1}{4ikr^2}$$

$$\therefore S_r = -\frac{\hbar}{M} \mathrm{Im}\,(\phi^* \partial_r \phi) = \frac{\hbar}{4Mkr^2}$$

粒子の運動量は $Mv = \hbar k$ より

$$dN_1 = S_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{\pi \hbar k}{Mk^2} = \frac{\pi v}{k^2} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} v \quad \left(k = \frac{1}{\lambda\!\!\!^-} \text{ より}\right)$$

//

(※2)

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2}\left|e^{2i\delta} - 1\right|^2 = \pi \lambda\!\!\!^{-2}\left|e^{-2ikR}\left(1 + \frac{2ikR}{g(E) - ikR}\right) - 1\right|^2$$

$$= \pi \lambda\!\!\!^{-2}\left|-1 - \frac{2ikR}{g(E) - ikR} + e^{2ikR}\right|^2 \quad (-e^{-2ikR} \text{ でくくり出した})$$

$$= \pi \lambda\!\!\!^{-2}\left|e^{ikR}\left(e^{ikR} - e^{-ikR}\right) - \frac{2ikR}{g(E) - ikR}\right|^2$$

$$= \pi \lambda\!\!\!^{-2}\left|2ie^{ikR}\sin kR - \frac{2ikR}{g(E) - ikR}\right|^2$$

//

(※3)

$$\sigma_r = \pi \lambda\!\!\!^{-2}\left(1 - |\eta|^2\right) = \pi \lambda\!\!\!^{-2}\left\{1 - \left|\frac{E - E_r + \frac{i}{2}(\Gamma_n + \Gamma_\gamma) - i\Gamma_n}{E - E_r + \frac{i}{2}(\Gamma_n + \Gamma_\gamma)}\right|^2\right\}$$

$$= \pi \lambda\!\!\!^{-2}\left\{1 - \left|\frac{E - E_r + \frac{i}{2}(-\Gamma_n + \Gamma_\gamma)}{E - E_r + \frac{i}{2}(\Gamma_n + \Gamma_\gamma)}\right|^2\right\}$$

$$= \pi \lambda\!\!\!^{-2}\left\{1 - \frac{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_n - \Gamma_\gamma)^2}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_n + \Gamma_\gamma)^2}\right\} = \pi \lambda\!\!\!^{-2}\frac{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_n + \Gamma_\gamma)^2 - (E - E_r)^2 - \frac{1}{4}(\Gamma_n - \Gamma_\gamma)^2}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_n + \Gamma_\gamma)^2}$$

$$= \pi \lambda\!\!\!^{-2}\frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_n + \Gamma_\gamma)^2}$$

//