

P4 理論ゼミ 担当: 湯川

No 1

§ 2.7 核力のメソン理論

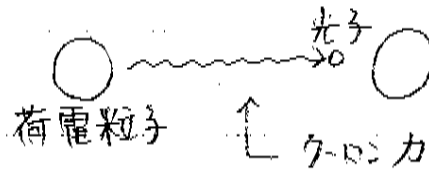
(1) メソンと核力

電磁場のまうな、核力に関する場の理論

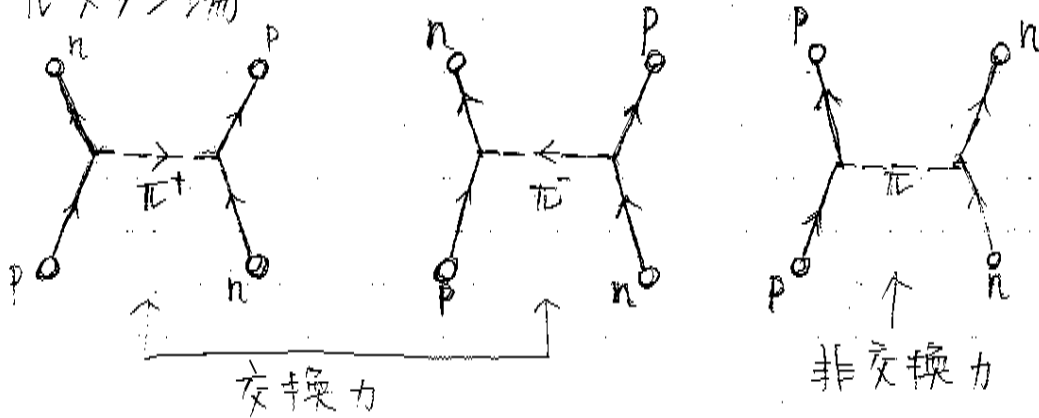
↓

π メソン場の理論 (湯川 1935年)

電磁場



π メソン場



電荷保存則を仮定すると、上の π メソンのやりとりが考えられる。

以下、核子とメソン場の相互作用を調べる。

(2) π^0 X 線による核力

電磁場のベクトルポテンシャル $A(\mathbf{r}, t)$ に対応して、

X 線場が実スカラーポテンシャル $\phi_0(\mathbf{r}, t)$ で表わされるとする。

□ エネルギー

- 光子 ((P), §13. (a) 式)

$$H_{\text{光子}} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} n_{\mathbf{k}, \sigma} \hbar \omega_{\mathbf{k}}$$

↑ 光子数

$$\omega_{\mathbf{k}} = c k \quad \text{より、}$$

(σ は偏光を表す)

- X 線

$$H_{\text{X線}} = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \quad \text{--- (2)}$$

光子は質量 0 だが、X 線には静止質量 m_{π} があるので、

$$\omega_{\mathbf{k}} = c \sqrt{k^2 + \mu^2} \quad \mu = \frac{m_{\pi} c}{\hbar} \quad \text{--- (3)}$$

□ ポテンシャル

- ベクトルポテンシャル (電磁場) ((P), §13. (4a) 式)

$$A(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_{\mathbf{k}}}} \cdot \underbrace{\epsilon_{\mathbf{k}, \sigma}}_{\text{偏光ベクトル}} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \underbrace{a_{\mathbf{k}, \sigma}}_{\text{消滅演算子}} + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \underbrace{a_{\mathbf{k}, \sigma}^{\dagger}}_{\text{生成演算子}} \right)$$

- スカラーポテンシャル (X 線場)

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_{\mathbf{k}}}} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}} + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} \right) \quad \text{--- (4)}$$

電子、光子の相互作用は古典論との対応で

導かれたが、X 線場の古典論は存在しないので、

以下で導く。

No.3

仮定

 $H'_{\text{核子} \cdot \text{X}} \text{X}$

- エルミート演算子 相対性理論でいう不変量
- 核子の座標, スピン, 運動量の関数

これから、形式を予想 ↓

$$H'_{\text{核子} \cdot \text{X}} = c g_0 \sum_n \varphi_0(k_n) \quad \dots (6)$$

$g_0(f_0)$: X場と核子の結合の強さを与える定数
(電磁場では e)

↓ スピンを含んだ形

$$H''_{\text{核子} \cdot \text{X}} = \frac{c f_0}{\mu} \sum_n \sigma_n \cdot \nabla \varphi_0(k_n) \quad \dots (7)$$

σ_n 擬ベクトルなので、 φ_0 は擬スカラーでないと行けない。

★ $n=1, 2$ とは 2 核子系を考える。

$$W_{\text{第2近似}} = \sum_k \frac{\langle 0 | H_2 | k \rangle \langle k | H_1 | 0 \rangle}{-i\hbar \omega_k} + \sum_k \frac{\langle 0 | H_1 | k \rangle \langle k | H_2 | 0 \rangle}{-i\hbar \omega_k}$$

振動 第2近似 核子1 → 核子2 の過程 核子2 → 核子1 の過程

const は核子が自分で放出したXを自分で吸収する自己エネルギー
 $\Rightarrow k_1 - k_2$ によるもの。

核子相互作用部分を U_0 とかくと、

$$U_0 = -\frac{4\pi c^2 g_0^2}{V} \sum_k \frac{\cos \{k \cdot (r_1 - r_2)\}}{\omega_k^2} = -\frac{4\pi g_0^2}{V} \sum_k \frac{\cos \{k \cdot (r_1 - r_2)\}}{k^2 + \mu^2}$$

↑ $\omega_k = c^2(k^2 + \mu^2)$

$$\sum_k = \int \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} \quad \text{と} \quad \dots$$

$$U_0 = - \frac{4\pi g_0^2}{(2\pi)^3} \int \frac{\cos\{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\}}{k^2 + \mu^2} d\mathbf{k}$$

$$= - \frac{4\pi g_0^2}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{\cos\{\mathbf{k} \cdot |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \cdot \cos\theta_k\}}{k^2 + \mu^2} \cdot k^2 \sin\theta_k d\theta_k dk$$

$$= - \frac{8\pi g_0^2}{8\pi^3} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{k^2 + \mu^2} \frac{2 \sin(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{k \cdot |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

$$= - \frac{2g_0^2}{\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \int_0^\infty \frac{k \sin(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{k^2 + \mu^2} dk$$

$$\int_0^\infty \frac{k \sin(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{k^2 + \mu^2} dk = \frac{\pi}{2} e^{-\mu|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad \text{より、} (\rightarrow \text{おまけ})$$

$$U_0 = - g_0^2 \frac{\exp(-\mu|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} ; \text{湯川ポテンシャル} \quad (11)$$

$\frac{e^{-\mu r}}{r}$ の関数 作用半径 $\frac{1}{\mu}$

★ スカラー-メソンのかわりに擬スカラー-メソンを考えると、

$$U_0 = - \frac{4\pi f_0^2}{(2\pi)^3 \mu^2} \int \frac{(\sigma_1 \cdot \mathbf{k})(\sigma_2 \cdot \mathbf{k}) \cos\{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\}}{k^2 + \mu^2} d\mathbf{k}$$

$$= - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{1i} \sigma_{2j} \frac{g^2}{\partial x_i \partial x_j} \int \frac{\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{k^2 + \mu^2} d\mathbf{k} \quad (|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \equiv r)$$

$$\int \frac{\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{k^2 + \mu^2} d\mathbf{k} = 2\pi^2 \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad \text{より、}$$

$$\frac{g^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad \text{を計算し、整理すると、} (\rightarrow \text{おまけ2})$$

スピン項

No. 5

$$\left\{ U_0 = \frac{1}{3} \mu f_0^2 \left\{ (\sigma_1 \cdot \sigma_2) + \left(1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{\mu^2 r^2} \right) S_{1,2} \right\} \cdot \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \right. \\ \left. S_{1,2} = 3 \frac{(\sigma_1 \cdot r)(\sigma_2 \cdot r)}{r^2} - (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \right. \quad (12) \\ \left. \text{テンソル力} \right.$$

今回は π^0 メソンによる核力を考えたので、核子を中性子、陽子で区別しなかった。

次に、正、負の電荷をもつ $\pi^\pm$ メソンについて考える。

(3) $\pi^\pm$ メソンによる核力

$n_k^{(+)}$ を π^+ メソン数 (運動量 $\hbar k$)、 $n_k^{(-)}$ を π^- メソン数 (運動量 $-\hbar k$) とし、

$$H_{\text{荷電メソン}} = \sum_k (n_k^{(+)} + n_k^{(-)}) \hbar \omega_k \quad (13)$$

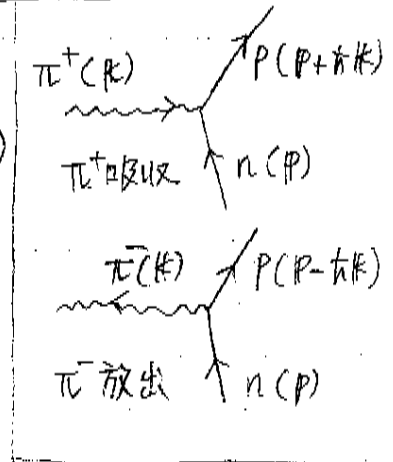
$n_k^{(+)} = b_k^\dagger b_k$, $n_k^{(-)} = c_k^\dagger c_k$ と、生成消滅演算子をおく。

(4) に対応して、複素スカラー関数 φ とし、

$$\varphi = \sum_k \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_k}} \left(\underbrace{b_k e^{i k \cdot r}}_{\substack{\uparrow \\ \pi^+ \text{吸収} \\ \text{運動量} \hbar k \text{ 増加}}} + \underbrace{c_k^\dagger e^{-i k \cdot r}}_{\substack{\uparrow \\ \pi^- \text{放出} \\ \text{運動量} \hbar k \text{ 減少}}} \right) \quad (14)$$

$$\varphi^* = \sum_k \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_k}} \left(\underbrace{b_k^\dagger e^{-i k \cdot r}}_{\substack{\uparrow \\ \pi^+ \text{放出}}} + \underbrace{c_k e^{i k \cdot r}}_{\substack{\uparrow \\ \pi^- \text{吸収}}} \right)$$

(4) 参照



No.6.

次に、相互作用演算子を考える。(7)との対応として、

$$H''_{\text{核子} \times \pi} = \frac{cf}{\mu} \sum_n \{ \phi_n \nabla \varphi + \phi_n^* \nabla \varphi^* \} \quad (15)$$

が考えられるが、これまでの議論では、核子を陽子と中性子とで区別していなかったのだ。

例えば、 $b \pi^+ e^+ \mu^+$ だけでは $\pi^+ \times \pi^+$ の吸収ということしか

表しておらず、陽子は $\pi^+ \times \pi^+$ を吸収できないという 電荷保存則 を表せていない。→再考

● なので、以降、新しい力学変量として電荷を考える。

電荷のとりうる固有値 ... 0 (中性子) e (陽子)

“電荷”という力学変量の固有状態 ↑ ↑

固有値が0かeかなので、電荷演算子はスピンのように表せるので、

そこで、アイソスピン τ を導入する。

$\tau = \frac{1}{2} \tau$ とおき、 $\tau = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$ が Pauli 行列と同じ形をとつとすると、電荷演算子は

$$e \frac{1 - \tau_z}{2} = e \left(\frac{1}{2} - \tau_z \right) \quad (18)$$

$\tau_z = 1$ が中性子、 $\tau_z = -1$ が陽子の状態となる。

中性子 陽子
↓ ↓

スピン固有関数に対応して、アイソスピン固有関数を a, b とかくと、

$$\tau_z a = \frac{1}{2} a, \quad \tau_z b = -\frac{1}{2} b \quad (19)$$

これらを用いると、荷電 π の吸収・放出の際の電荷保存則が、アイソスピン状態の遷移を表すことで表現できる。

(20) (21) 参照

これで、陽子と中性子を区別できた。

No. 7

(15)の代わりに、

$$H''_{\text{核子,XY}} = \frac{\sqrt{2}cf}{\mu} \sum_n \left\{ \tau_n^{(-)} \sigma_n \cdot \nabla \phi + \tau_n^{(+)} \sigma_n \cdot \nabla \phi^* \right\} \quad (22)$$

結果を簡単にするために挿入

とおくと、電荷を考慮したポテンシャルが求められる。

実際計算すると、(12)の結果に、

$$2(\tau_2^{(+)} \tau_1^{(-)} + \tau_2^{(-)} \tau_1^{(+)}) = \tau_{2x} \tau_{1x} + \tau_{2y} \tau_{1y}$$

が前にかかった形になる。

↓ 以上、まとめると、

擬スカラーメソン場による核力ポテンシャルは、

$$\text{中性メソン部分: } U_0 = f_0^2 F(k, \sigma_1, \sigma_2) \quad (24)$$

$$\text{荷電メソン部分: } U_{\pm} = (\tau_{1x} \tau_{2x} + \tau_{1y} \tau_{2y}) f^2 F(k, \sigma_1, \sigma_2) \quad (25)$$

と表せる。

(4) 核力の荷電独立性 (陽子or中性子)

荷電独立性…核力は相互作用する核子の種類に依らない。

これを説明する。

上で用いた結合定数 f_0 および f に以下の関係があるとする。

$$\text{中性子の場合 } f_0 = f$$

$$\text{陽子の場合 } f_0 = -f$$

$$\text{言い換えれば、 } f_0 = f \tau_z \quad (26)$$

すると、(24)は、

$U_0 = \tau_{1z} \tau_{2z} f^2 F(k, \sigma_1, \sigma_2)$ と書き換えられるので、
中性、荷電メソンの核力ポテンシャルの合計は、

$$U = U_0 + U_{\pm} = \underbrace{(\tau_1 \cdot \tau_2)}_{\text{アイソスピン項}} f^2 F(k, \sigma_1, \sigma_2) \quad (27)$$

アイソスピン項の

2核子の合成アイソスピンバクトルを

$$T = \tau_1 + \tau_2 \quad \dots (29) \quad \text{で定義すると、}$$

$$\text{全電荷演算子} \equiv e(1 - T_z) \quad (\text{118)参照}) \quad \dots (30)$$

合成アイソスピンは合成スピンのように考えることができる。

スピンの場合と同じように、2核子では、

合成アイソスピンが1の荷電3重項状態と、

“ ” が0の荷電1重項状態がある。

(τ_1, τ_2) の値は、それぞれ

3重項 $\dots 1$, 1重項 $\dots -3$

詳しくは 2-4 表参照

3重項状態では、 (τ_1, τ_2) の値が核子の種類に

よらない $\Rightarrow$ 荷電独立性。

No9

・ 荷電3重項, 1重項状態の物理的意味

・ Pauli 禁制原理

陽子, 中性子を内部状態 (アイスピンの) 異なる同種粒子とみると, 陽子-中性子間でも禁制原理を適用できる。

中性子と陽子を別粒子と見るか, 同粒子と見るかは,

Pauli 禁制原理の解釈を変更すれば, 同値となる。(付録)

→ 交換させる変数に, アイスピンの変数を加える

すなわち, 2粒子の波数関数は, 空間部分 $\phi(r_1, r_2)$

スピン関数 $\sum(\sigma_1, \sigma_2)$, アイスピンの関数 $\chi(\eta_1, \eta_2)$ を用いて,

$\phi(r_1, r_2) = \sum(\sigma_1, \sigma_2) \cdot \chi(\eta_1, \eta_2)$ とかける。

Pauli 禁制原理はこの全体が交換に対して反対称であることを課す。

荷電状態の違いは, アイスピンの関数の対称, 反対称 (2-5表) の違いとで解釈できる。

それらの状態についての核力ポテンシャルは (32) ~ (35) で表される。

・ 結合定数の大きさ

実験におい、 $\frac{f^2}{\hbar c} = 0.08$

$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} = 0.0073$ と比べると, 約10倍

No.10

付録9 アイソスピ形式での Pauli の禁制原理

アイソスピ変数 η_1, η_2 , スピン変数 s_1, s_2 系の波動関数 $\psi(k_1, s_1, \eta_1; k_2, s_2, \eta_2)$ — ①

$$\psi(k_1, s_1, \eta_1; k_2, s_2, \eta_2) = -\psi(k_2, s_2, \eta_2; k_1, s_1, \eta_1) \quad \text{--- ②}$$

が、中性子同士、陽子同士の間だけに Pauli の禁制原理を要求することと同等であることを示す。(従来の Pauli 禁制)

アイソスピ固有関数を $a(\eta)$, $b(\eta)$ とかくと、

$$\tau_z a(\eta) = a(\eta)$$

中性子状態

$$\tau_z b(\eta) = -b(\eta)$$

陽子状態

すると、①は、以下にかけれる

$$2 \text{ 中性子系: } \psi = \phi_1(k_1, s_1; k_2, s_2) a(\eta_1) a(\eta_2)$$

$$2 \text{ 陽子系: } \psi = \phi_2(k_1, s_1; k_2, s_2) b(\eta_1) b(\eta_2)$$

よって、②の要請は、 ϕ_1 及び ϕ_2 の反対称性 (④) と同等となり、これは Pauli の禁制原理と同等。

次に陽子-中性子系をみる。

アイソスピンを考えなければ、陽子と中性子は違う粒子なので、何の制約もないはず。

②を満足するものとして

↑ 対称

$$\phi^{(-)}(k_1, s_1; k_2, s_2)$$

↑ 反対称

$$\frac{a(\eta_1) b(\eta_2) + b(\eta_1) a(\eta_2)}{\sqrt{2}}$$

$$\phi^{(+)}(k_1, s_1; k_2, s_2)$$

↑ 対称

$$\frac{a(\eta_1) b(\eta_2) - b(\eta_1) a(\eta_2)}{\sqrt{2}}$$

← 反対称

No. 11

のようになる。これらの線型結合も②を満足するので、和をとると、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \{ \phi^{(-)} + \phi^{(+)} \} a(\eta_1) b(\eta_2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \phi^{(-)} - \phi^{(+)} \} b(\eta_1) a(\eta_2)$$

$\{ \phi^{(-)} \pm \phi^{(+)} \}$ には何の対称性もないため、

従来の Pauli 禁制原理と同等の内容が示せた。

おまけ.. 微分積分計算

No.12

おまけ1

$$\int_0^{\infty} \frac{k \sin(k|z_1 - z_2|)}{k^2 + \mu^2} dk = \int_0^{\infty} \frac{k \sin(kr)}{k^2 + \mu^2} dk$$

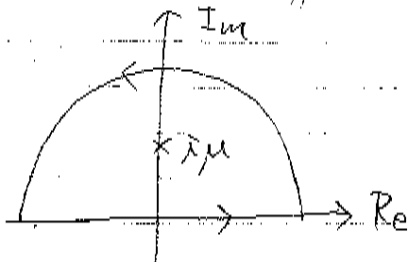
$$= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \frac{k(e^{ikr} - e^{-ikr})}{k^2 + \mu^2} dk$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{k e^{ikr}}{k^2 + \mu^2} dk + \int_0^{\infty} \frac{-k e^{-ikr}}{k^2 + \mu^2} dk \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{k e^{ikr}}{(k+i\mu)(k-i\mu)} dk + \int_0^{\infty} \frac{-k e^{-ikr}}{(k+i\mu)(k-i\mu)} dk \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k e^{ikr}}{(k+i\mu)(k-i\mu)} dk \quad \begin{array}{l} \text{積分路を下の図のようにとる。} \\ \text{留数定理より、} \end{array}$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}[k-i\mu] = \pi \times \frac{i\mu e^{-\mu r}}{2i\mu} = \frac{\pi}{2} e^{-\mu r}$$



おまけ2

$$(*) U_0 = - \frac{4\pi f_0^2}{(2\pi)^3 \mu^2} \left(- \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{1i} \sigma_{2j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(2\pi^2 \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) \right)$$

$$= \frac{f_0^2}{\pi \mu^2} \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{1i} \sigma_{2j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{e^{-\mu r}}{r} \right) \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{e^{-\mu r}}{r} \right) = \frac{-\mu r - 1}{r^2} e^{-\mu r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j} = - \frac{\mu r + 1}{r^3} e^{-\mu r} x_j$$

No. 13

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{e^{-\mu r}}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\mu r + 1}{r^3} e^{-\mu r} x_j \right)$$

$$= \frac{r^3(\mu - \mu(\mu r + 1)) - 3r^2(\mu r + 1)}{r^6} e^{-\mu r} x_i x_j - \frac{\mu r + 1}{r^3} e^{-\mu r} \frac{\partial x_j}{\partial x_i}$$

$$= \frac{\mu^2 r^2 + 3\mu r + 3}{r^5} e^{-\mu r} x_i x_j - \frac{\mu r + 1}{r^3} e^{-\mu r} \frac{\partial x_j}{\partial x_i}$$

$$= \left(1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{\mu^2 r^2} \right) \frac{\mu^2 e^{-\mu r}}{r^3} x_i x_j - \left(\frac{1}{\mu r} + \frac{1}{\mu^2 r^2} \right) \frac{\mu^2 e^{-\mu r}}{r} \frac{\partial x_j}{\partial x_i}$$

$$\text{Ex 2. } \nabla_{1i} \nabla_{2j} x_i x_j = (\nabla_1 \cdot \nabla)(\nabla_2 \cdot \nabla),$$

$$\nabla_{1i} \nabla_{2j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = (\nabla_1 \cdot \nabla_2) \quad \text{Ex 3.}$$

$$\nabla_{1i} \nabla_{2j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{e^{-\mu r}}{r} \right)$$

$$= \left\{ \left(1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{\mu^2 r^2} \right) \frac{(\nabla_1 \cdot \nabla)(\nabla_2 \cdot \nabla)}{r^2} - \left(\frac{1}{\mu r} + \frac{1}{\mu^2 r^2} \right) (\nabla_1 \cdot \nabla_2) \right\} \frac{\mu^2 e^{-\mu r}}{r}$$

$$\therefore \text{Ex 3 } \nabla_0 = \nabla^2 \text{ and Ex 2. (2) is proved. //$$