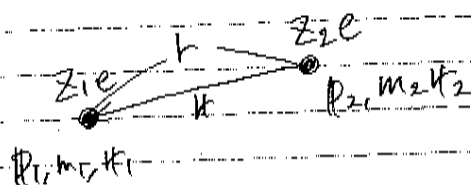


P4 理論セミ

第11章 7-ロン相互作用

津村

§1. 序説



7-ロンポテンシャル

$$V(r) = \frac{z_1 z_2 e^2}{r}$$

2粒子系 $H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{z_1 z_2 e^2}{r}$

↓
 重心運動と相対運動に分離

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{z_1 z_2 e^2}{r} \quad \left(\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

(=従う 1粒子系に帰着)

② 7-ロンポテンシャル $V(r) = z_1 z_2 e^2 \frac{1}{r}$ は、

$r \rightarrow \infty$ で緩やかに収束するため、9章・10章をそのまま適用できない。
 特に散乱について、位相のずれの決め方が難しい。

一方で、7-ロン・ポテ内の1粒子系シュレディンガー eq. (I)

ラプラスの微分方程式に帰着する

→ 束縛状態のエネルギー・スピン、散乱断面積が決定できる

I. 水素原子

§2. 水素原子のシュレディンガー eq.

電子-陽子系の重心系でのエネルギーを E とする。 $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p}$

相対運動についてのシュレディンガー eq. は、

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{r} \right] \psi(r) = E \psi(r) \quad (3)$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r = \frac{1}{\hbar^2 r^2} \hat{L}^2 \quad \text{等々}$$

$$\left[\Delta + \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^2}{r} + \varepsilon \right] \psi(r) = 0 \quad \left(\varepsilon = \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \quad (5)$$

角変数と軌径部分を分離 $\psi(r) = Y_{lm}(\theta, \phi) \frac{y_l(r)}{r}$

$$y_l'' + \left[\varepsilon + \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] y_l = 0 \quad (4)$$

この解は、原点正則なものを探す。

$r \rightarrow \infty$ ①
 (4) $\rightarrow y_l'' + \varepsilon y_l = 0$

• $E > 0$ のとき $y_l \sim \alpha_1 \sin \sqrt{\varepsilon} r + \alpha_2 \cos \sqrt{\varepsilon} r$ 振動解
 非束縛状態

• $E < 0$ のとき $y_l \sim \beta_1 e^{Kr} + \beta_2 e^{-Kr} \quad (K \equiv (-\varepsilon)^{1/2} = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar})$

固有解として許されるのは、 $\beta_1 = 0$ となるような特定の E とするときのみ
 束縛状態

② 水素原子の束縛状態 $\rightarrow$ 水素類似原子への拡張

$\oplus \text{---} \ominus$
 H
 換算質量 $m = \frac{m_e M_p}{m_e + M_p}$

$\oplus \text{---} \ominus$
 He^+

$\oplus \text{---} \ominus$
 Li^{++}

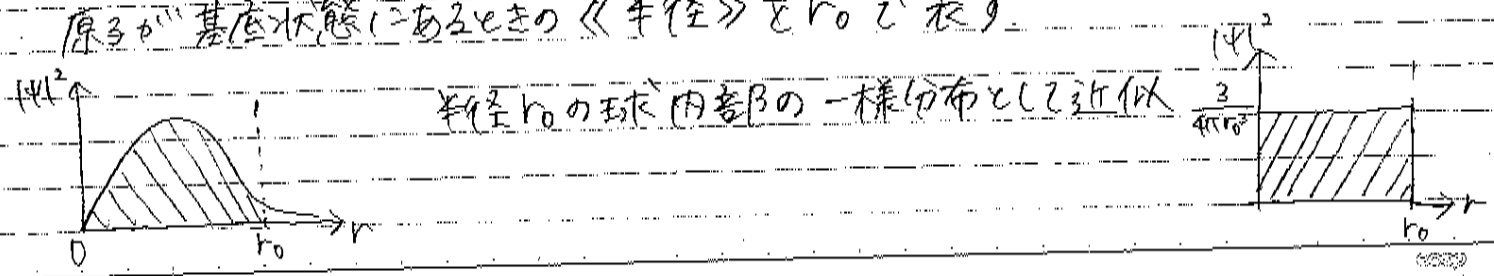
核の質量

$$\rightarrow m' = \frac{m_e M_A}{m_e + M_A}$$

ポテンシャル $\frac{e^2}{r} \rightarrow \frac{Ze^2}{r}$

③ 基底状態の束縛エネルギーの大きさの程度

原子が基底状態にあるときの「半径」を r_0 で表す。



Q ポテンシャルエネルギーの平均値 $\sim -\frac{e^2}{r_0}$

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \int_0^{r_0} \left(-\frac{e^2}{r}\right) \times 4\pi r^2 dr = -\frac{3}{2} \frac{e^2}{r_0} \sim -\frac{e^2}{r_0}$$

運動エネルギーの平均値 $\sim \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}$

$$\textcircled{2} \quad \text{不確定性関係 } \Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar \text{ より, } \Delta p \gtrsim \frac{\hbar}{r_0}$$

$$\text{よって全エネルギー } E(r_0) = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} - \frac{e^2}{r_0}$$

$$\text{これが最小となるのは } r_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \text{ のときで, } E_1 = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^2} \quad (7)$$

(基底状態の波動関数の広がり) (基底状態におけるエネルギー) -13.6 eV

$$\textcircled{3} \quad \text{ボーア半径 } a = \frac{\hbar^2}{me^2} (=0.529 \text{ \AA})$$

5.4. 極座標によるシュレディンガー eq. の解法

$$(6) \quad k = (-E)^{1/2} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (8) \quad a = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

$$(4) \quad \frac{d^2}{dr^2} y_r + \left[\varepsilon + \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] y_r = 0$$

$$\downarrow \text{変数変換 } x = 2kr \quad \left(4k^2 \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{dr^2} \right)$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{V}{x} - \frac{1}{4} \right] y_r = 0 \quad (9)$$

$$(E = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^2}) \quad V = \frac{1}{kx} = \frac{e^2}{\hbar c} \sqrt{\frac{mc^2}{-2E}} \quad (10)$$

$$\cdot x \rightarrow 0 \text{ じ } (11) \rightarrow \left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] y_r = 0$$

$$y_r \sim x^{l+1} \quad (x^{l+1}, x^{-l} \text{ のうち原点近辺は})$$

$$x \rightarrow \infty \text{ で } (11) \rightarrow \left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4} \right] y_L = 0$$

$$y_L \sim A_1 e^{x/2} + A_2 e^{-x/2} \sim \underline{e^{x/2}}$$

※ 特殊な V のときだけ $A_1 = 0$ となって

$$\underline{y_L \sim e^{-x/2}} \text{ となる}$$

(固有解) 二れを求めたい!

② 固有解を求めるための関数の変換

$$(4) (= y_L = \underline{x^{l+1}} \underline{e^{-x/2}} v_L(x)) \text{ を代入}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} y_L &= \frac{d}{dx} \left[\frac{l+1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{v_L'}{v_L} \right] y_L \\ &= \left[\frac{v_L''}{v_L} + \left(\frac{2l+2}{x} - 1 \right) \frac{v_L'}{v_L} + \frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{l+1}{x} + \frac{1}{4} \right] y_L \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} (4) \quad 0 &= \left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{v}{x} - \frac{1}{4} \right] y_L \\ &= \left[\frac{v_L''}{v_L} + \left(\frac{2l+2}{x} - 1 \right) \frac{v_L'}{v_L} - \frac{l+1}{x} + \frac{v}{x} \right] y_L \end{aligned}$$

↓

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + (2l+2-x) \frac{d}{dx} - (l+1-v) \right] v_L = 0 \quad (12)$$

ラプラスの微分方程式 (付録 B, §1)

この解は原点正則なものはない。"合流型超幾何級数"

それ以外の解は $x \rightarrow 0$ で $v_L \sim \frac{1}{x^{2l+1}}$

$$\left(\textcircled{+} x \rightarrow 0 \text{ で } (12) \rightarrow \left[x \frac{d^2}{dx^2} + (2l+2) \frac{d}{dx} \right] v_L = 0 \right)$$

(12) の最低次 $O\left(\frac{1}{x}\right)$

v_L が x の多項式でなければならない

② 合流型超幾何級数

一般に、

$$\left[z \frac{d^2}{dz^2} + (\beta - z) \frac{d}{dz} - \alpha \right] f(z) = 0 \quad \text{の原点正則な解は、}$$

$$F(\alpha|\beta|z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+n)} \cdot \frac{z^n}{n!} \quad \left(\begin{array}{l} \text{ガンマ関数} \\ \Gamma(n+1) = n! \end{array} \right)$$

$$\left(= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\cdots\alpha}{(\beta+n-1)(\beta+n-2)\cdots\beta} \cdot \frac{z^n}{n!} \right)$$

確かに、 $f(z) = \sum_n a_n z^n$ とおくと、O.D.E. (= 代入すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_n \left[\frac{n(n-1)}{z} + \frac{n(\beta-z)}{z} - \alpha \right] a_n z^n \\ &= \sum_n \left[a_n \{n(n-1+\beta)\} z^{n-1} - a_n(n+\alpha) z^n \right] \\ &= \sum_n \left[a_{n+1} \{ (n+1)(n+\beta) \} - (n+\alpha) a_n \right] z^n \end{aligned}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+\alpha}{n+\beta} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore a_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+\alpha)}{(k+\beta)(k+1)} = \frac{(\alpha+n-1)\cdots\alpha}{(\beta+n-1)\cdots\beta} \cdot \frac{1}{n!}$$

今考えている (12) 式では、 $\alpha = l+1-\nu$, $\beta = 2l+2$ だから、

原点正則な解は、

$$F(l+1-\nu|2l+2|x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(l+1+p-\nu)}{\Gamma(l+1-\nu)} \frac{(2l+1)!}{(2l+1+p)!} \cdot \frac{x^p}{p!} \quad (13)$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+l-\nu)(p-1+l-\nu)\cdots(1+l-\nu)}{(p+2l+1)(p-1+2l+1)\cdots(1+2l+1)} \cdot \frac{x^p}{p!} \quad (13')$$

一般の ν については、

(13) は、 $x \rightarrow \infty$ で $F(l+1-\nu|2l+2|x) \sim x^{-(l+1+\nu)} e^x$ (付録 B (9)-(11) 参照)

となるから、

$$y_l \sim x^{-\nu} e^{x/2}$$

固有解 1 となる。

② 量子化条件

V が特定の値をとるとして (13) は多項式になる

$\Leftrightarrow$ (13') の分子のどれかがゼロ

$\Leftrightarrow l+1-V \leq 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{V = n = l + 1 + n' \quad (14)}$$

$(n' = 0, 1, \dots, \infty)$

このとき (13) は n' 次の多項式に縮まるから、 $(\psi_l \sim x^{n'})$

$x \rightarrow \infty$ として $\psi_l \sim x^n e^{-x/2}$ 固有解になる

(14) と (10) から、角運動量 (lm) をもつ束縛状態のエネルギー準位がわかる ($\rightarrow$ §5)

対応する固有関数は、($\rightarrow$ §6)

$$\psi_l = x^{l+1} e^{-x/2} \sum_{p=0}^{n'} \frac{n'! (2l+1)!}{(n'-p)! (2l+1+p)! p!} x^p \quad (15)$$

ラゲール V の陪多項式 $L_{n'}^{2l+1}(x)$ (付録 B §2)
(定数倍除く)

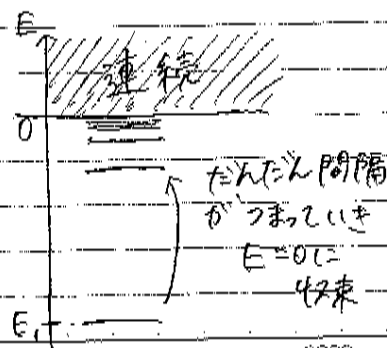
§5, エネルギースペクトル, 縮退

$$(10) \quad V = \frac{1}{ka} = \frac{e^2}{\hbar c} \sqrt{\frac{mc^2}{-2E}} \quad \text{と (14) から、}$$

$$\boxed{E_{ln} = - \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{mc^2}{2(l+1+n')^2}} \quad (16)$$

n' : 軌道量子数 $\leftarrow \psi_l$ の節の数に等しい

$n' = 0, 1, 2, \dots, \infty$ より、準位は可算無限個



この状況は 長ポリポテンシャルに特有
 短ポリの場合は、束縛状態は有限個

一般に $r^2 V \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\infty$ のとき、エネルギー準位は可算無限個
 $r^2 V \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \text{const}$ のとき、有限個

l はいろいろな値 ($l=0, 1, 2, \dots, \infty$) をとりうるから、(16) から、

エネルギーは「主量子数」 $n = l + n' + 1$ だけで決まる。

$$E_n = - \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{mc^2}{2n^2} \quad (n=1, 2, \dots, \infty) \quad (17)$$

各エネルギーに対して、 l は 0 から $n-1$ までの全ての整数値をとれるから、

準位 E_n の縮退は、

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n(n-1) + n = \underline{n^2}$$

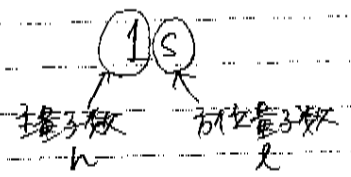
$m = -l, \dots, l$

「方位量子数」 $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$
 「磁気量子数」 $m = -l, -l+1, \dots, l$

$\left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} n^2 \text{ 個の関数 } (l, m) \text{ で} \\ \text{状態を指定} \end{array}$
 E_n の部分空間の

④ 分光学における伝統的記法

基底状態



l	0	1	2	3	4	...
記号	s	p	d	f	g	...

第1励起状態

$2^2 = 4$ 重に縮退

1個の $2s$ ($l=0$) と 3個の $2p$ ($l=1$)

前期量子論が予想したスペクトル線の位置がうまく説明できる
 微細構造は説明できない

相対論的効果
 電子スピン
 の考慮が必要

§6. 束縛状態の固有関数

量子状態 (n, l, m) の波動関数は、

$$\Psi_{nlm} = a^{-3/2} N_{nl} F_{nl}\left(\frac{2r}{na}\right) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (18)$$

$$r = r', \quad F_{nl} = x^l e^{-x/2} L_{n-l-1}^{2l+1}(x) \quad (18')$$

$$N_{nl} = \frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}} \quad (\text{規格化定数}) \quad (18'')$$

$$\circ \quad \langle r \rangle_{nl} = \frac{1}{2} a (3n^2 - l(l+1)) \quad (19) \quad \left(\text{付録Bを参照。} \right. \\ \left. \text{証明はイザカワ I p.167~169} \right)$$

より、 n が大になると l につれ電子は陽子から遠ざかる。

$$\cdot \text{基底状態 (} l=0 \text{) } \langle r \rangle_{10} = \frac{3a}{2} \quad (\text{§3 (8) と (ほぼ) 一致})$$

• $l = n-1$ (最大値) のとき

$$\Psi_{nlm} = \left[\frac{1}{(2n)!} \right]^{1/2} \left(\frac{2}{na} \right)^{3/2} \left[\left(\frac{2r}{na} \right)^{n-1} e^{-r/na} \right] Y_l^m(\theta, \varphi)$$

(H)
R_l とおく

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty R_l^* r R_l r^2 dr$$

$$= \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{2}{na} \right)^3 \int_0^\infty \left(\frac{2r}{na} \right)^{2n-2} e^{-2r/na} r^3 dr = n(n+\frac{1}{2})a$$

$$\langle r^n \rangle = \int_0^\infty R_l^* r^n R_l r^2 dr = n^2 (n+\frac{1}{2})(n+1)a^2$$

より、

$$\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} = \frac{1}{2} na \sqrt{2n+1} = \frac{\langle r \rangle}{\sqrt{2n+1}}$$

n が大になると

$$\frac{\Delta r}{\langle r \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

半径 $n(n+\frac{1}{2})a \sim n^2 a$ の球面

近づく = 局在

$$\text{エネルギーは、} E_n = -\frac{e^2}{2a n^2}$$

古典円軌道に対応

正、7-ロン散乱

全7、7-ロン散乱

7-ロン相互作用をする2粒子の相対運動のシュレインゲル-eg. は、

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \right] \psi(r) = E \psi(r) \quad (20)$$

↑ 重い系のエネルギー

散乱問題では $E > 0$ の (20) の固有解を考えればよい。

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (21), \quad \gamma = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \quad (22)$$

として (20) を書き直すと、

$$\left(\Delta + k^2 - \frac{2\gamma k}{r} \right) \psi(r) = 0 \quad (23)$$

と定める。

$$\psi(r) = e^{ikz} f(r-z) \quad (24)$$

とおく

⊗
↓
 $u = r - z$

$$\left[u \frac{d^2}{du^2} + (1 - iku) \frac{d}{du} - \gamma k \right] f(u) = 0$$

↓ $v = iku = ik(r-z)$ とおく

$$ik \frac{d}{dv} = \frac{d}{du}$$

$$\left[v \frac{d^2}{dv^2} + (1 - v) \frac{d}{dv} + i\gamma \right] f(v) = 0 \quad \text{ラプラス型!!}$$

→ 原点正則な解は、 $f(v) = F(-i\gamma | 1 | v)$ 合流型超幾何関数

シュレインゲル-eg. は、

$$\psi_0 = A e^{ikz} F(-i\gamma | 1 | ik(r-z)) \quad (25)$$

この形の正則解をもつ。(Aは規格化定数)

⑤ 関数の変換 $\left(\begin{array}{l} \Delta, \nabla \cdots \text{直交座標系}(x, y, z) \text{に} \nabla^2 u \\ (\)' \cdots u = r - z \text{ (} = r(1-z) \end{array} \right)$

$$\nabla r = \frac{r}{r}$$

$$\Delta r = \frac{2}{r}$$

$$\Delta(e^{ikz} f(r-z)) = (\Delta e^{ikz}) f(u) + 2(\nabla e^{ikz}) \cdot (\nabla f(u)) + e^{ikz} \Delta f(u)$$

$$= -k^2 e^{ikz} f(u) + 2ik e^{ikz} f'(u) \left(\frac{z}{r} - 1\right) + e^{ikz} \left\{ 2\left(1 - \frac{z}{r}\right) f''(u) + \frac{2}{r} f'(u) \right\}$$

$$= -k^2 e^{ikz} f(u) + 2ik e^{ikz} f'(u) \left(\frac{z}{r} - 1\right) + e^{ikz} \left\{ 2\left(1 - \frac{z}{r}\right) f''(u) + \frac{2}{r} f'(u) \right\}$$

より、

$$0 = \left[\Delta + k^2 - \frac{2\delta k}{r} \right] \psi(u)$$

$$= \frac{2e^{ikz}}{r} \left[u f''(u) + (1 - iku) f'(u) - \delta k f(u) \right]$$

$$\therefore \left[u \frac{d^2}{du^2} + (1 - iku) \frac{d}{du} - \delta k \right] f(u) = 0$$

付録 B §1 (9) ~ (11) より、(25) の ψ_c (27) は、

$$\psi_c = \psi_i + \psi_d \quad (28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_i = A e^{ikz} W_1(-i\delta(1+iku)) \quad (26) \\ \psi_d = A e^{ikz} W_2(-i\delta(1+iku)) \quad (27) \end{array} \right\} \quad (20) \text{ の正則解である}$$

と表せし、 $|u| = kr |1 - \cos \theta| = 2kr \sin^2 \frac{\theta}{2}$ がいちばん、

$$A = \Gamma(1+i\delta) e^{-\pi\delta/2} \text{ とおくと、}$$

$$\psi_i \sim A e^{ikz} \frac{1}{\Gamma(1+i\delta)} (-iku)^{i\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\Gamma(n-i\delta)}{\Gamma(-i\delta)} \right)^2 \frac{(-iku)^n}{n!}}{\Gamma(-i\delta)} \quad (\text{付録 B §1 (10)})$$

$$= A e^{ikz} \frac{1}{\Gamma(1+i\delta)} e^{i\delta(\log(ku) - \frac{\pi}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\Gamma(n-i\delta)}{\Gamma(-i\delta)} \right)^2 \frac{(-iku)^n}{n!}}{\Gamma(-i\delta)}$$

$$= e^{i(kz + \delta \log ku)} \left[1 + \frac{\delta^2}{iku} + \cdots \right] \quad (30)$$

$$\begin{aligned}\psi_d &\sim_{|u| \rightarrow \infty} A e^{ikz} \frac{1}{\Gamma(-i\gamma)} e^{iku} (iku)^{-(1+i\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(n+1+i\gamma)}{\Gamma(1+i\gamma)} \right)^2 \frac{(iku)^{-n}}{n!} \quad (\text{BSL(11) \#4}) \\ &= A e^{ikz} \frac{-i\gamma}{\Gamma(1-i\gamma)} \frac{e^{iku}}{iku} e^{-i\gamma(\log(ku) + \frac{i}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(n+1+i\gamma)}{\Gamma(1+i\gamma)} \right)^2 \frac{(iku)^{-n}}{n!} \\ &= -\frac{\gamma}{ku} \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(1-i\gamma)} e^{i(kr - \gamma \log(ku))} \left[1 + \frac{(1+i\gamma)^2}{iku} + \dots \right] \quad (31)\end{aligned}$$

$\gamma = r \cos \theta$ を用いて $u = r - z = r(1 - \cos \theta)$ より, (31) の初項は,
 $= 2r \sin^2 \frac{\theta}{2}$

$$\psi_d \sim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \exp(i(kr - \gamma \log 2kr)) f_c(\theta) \quad (32)$$

$$f_c(\theta) = -\frac{\gamma}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} \exp(-i\gamma \log(\sin^2 \frac{\theta}{2}) + 2i\gamma \sigma_0) \quad (33)$$

$$\sigma_0 = \arg \Gamma(1+i\gamma) \quad (34)$$

① $\frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(1-i\gamma)} = e^{2i\gamma \sigma_0}$ とおくと,
 $\sigma_0 = \text{Im}(\log \Gamma(1+i\gamma))$
 $= \arg \Gamma(1+i\gamma)$

§8. ラザワースの公式

ポテンシャル $V(r) \sim O(\frac{1}{r^2})$ のときは,

$$\psi \sim e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{と表せる。}$$

入射平面波 散乱による外向波

② η -ロンポテンシャルの場合は, (30) のように,

$$\psi_i \sim_{|r-z| \rightarrow \infty} e^{i(kz + \gamma \log k(r-z))}$$

η -ロンは
 散乱が大きいとき

と表わして, 平面波と同じと見なせる。

しかし、(30)より、

$$|\psi_i|^2 \underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} \left| \left(1 + \frac{\gamma^2}{ik(r-z)} + \dots \right) \right|^2 \underset{|z| \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{密度1の波}$$

流束の密度 $\hat{J}_i = \frac{\hbar}{m} \text{Im} [\psi_i^* (\nabla \psi_i)]$ は、

$$\begin{aligned} \nabla \psi_i &\underset{(30)}{\sim} \psi_i \left[\nabla \left\{ i(kz + \gamma \log(k(r-z))) \right\} + \left(1 + \frac{\gamma^2}{ik(r-z)} \right) \nabla \left(1 + \frac{\gamma^2}{ik(r-z)} \right) \right] \\ &= \psi_i \left[ik \hat{z} + i\gamma \frac{1}{r-z} \left(\frac{k}{r} - \hat{z} \right) + \left(1 + \frac{\gamma^2}{ik(r-z)} \right) \frac{\gamma^2}{ik} \left(-\frac{1}{(r-z)^2} \right) \left(\frac{k}{r} - \hat{z} \right) \right] \\ &= \psi_i \left[ik \hat{z} + i\gamma \frac{1}{r-z} \left(\frac{k}{r} - \hat{z} \right) + O((r-z)^{-2}) \right] \end{aligned}$$

より、

$$\hat{J}_i = \frac{\hbar}{m} \left[k \hat{z} + \left(\frac{k}{r} - \hat{z} \right) O\left(\frac{1}{r}\right) \right]$$

$\hat{z}$ の向きに大抵は $\frac{\hbar k}{m} \rightarrow \psi_i$ は入射波と考えられる。

$$\psi_d \text{ の漸近部分 } \sim \frac{\exp[i(kr - \gamma \log 2kr)]}{r}$$

(32) ~ (34) から、

流束の密度 $\hat{J}_d = \frac{\hbar}{m} \text{Im} [\psi_d^* (\nabla \psi_d)]$ は、

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{を用いて、}$$

$$\begin{aligned} \nabla \psi_d &\underset{(32)}{\sim} \hat{r} \psi_d \left[\frac{d}{dr} \{ i(kr - \gamma \log 2kr) \} + r \times \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right] + \hat{\theta} \psi_d \frac{f'_c(\theta)}{f_c(\theta)} \\ &= \hat{r} \psi_d \left[ik - (1+i\gamma) \frac{1}{r} \right] + \hat{\theta} \psi_d \frac{1}{r} \frac{f'_c(\theta)}{f_c(\theta)} \end{aligned}$$

より、

$$\hat{J}_d = \frac{\hbar}{m} |\psi_d|^2 \left[\hat{r} \left(k + O\left(\frac{1}{r}\right) \right) + \hat{\theta} O\left(\frac{1}{r}\right) \right] \sim \frac{|f_c(\theta)|^2}{r^2} \hat{r}$$

散乱波と考えられる。

c. 微分断面積

以上より γ -ロン散乱の微分断面積は、

$$\underline{\sigma_c(d\Omega)} = \frac{|f_c|^2}{|f_i|^2} k^2 d\Omega = |f_c(\theta)|^2 d\Omega \quad (35)$$

作用半径の短いポテンシャルと類似

$f_c(\theta)$: γ -ロン散乱の振幅は、(33) からわかるので、

$$\sigma_c(d\Omega) = \frac{\gamma^2}{4k^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \sin^{-4} \frac{\theta}{2} \quad (36)$$

γ -ロン散乱の断面積の特徴:

- (i) ポテンシャルの絶対値だけで決まり、符号にはよらない。
- (ii) 角分布はエネルギーに無関係。
- (iii) エネルギー依存性は $\sigma_c \propto \frac{1}{E^2}$

(iv) 全断面積 $\int \sigma_c(d\Omega) d\Omega$ は、 θ が 0 になると ∞ に発散

(注) これらは純粋な γ -ロン場特有のもの

実際は、電子による遮蔽効果により、遠方でポテンシャルが 0 となり、微分断面積は発散しなくなる

$\theta > \frac{2\gamma}{ka}$, $\frac{1}{ka}$ のときは純粋と見なせる

$\gamma \propto \frac{Z_1 Z_2}{v}$ Z 大や v 小のときは
限界角 大きくなる

§9. 部分波への分解

$f_c(\theta)$ の Y_{lm} による展開の収束がおそい

純粋な γ -ロン散乱のときは直接的に解けるからあまり意味がないが、 γ -ロンに短距離相互作用が付け加えられた場合には有用。

シュレディンガー eq. の軌道部分とは、

$$y_l'' + \left[k^2 - \frac{2\gamma k}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] y_l = 0 \quad (37)$$

$$y_L = \underbrace{e^{i\delta r}}_{r \rightarrow 0 \text{ の漸近形}} \underbrace{(kr)^{l+1}}_{r \rightarrow 0 \text{ の漸近形}} v_L, \quad \xi = -2i\delta r \quad (38)$$

$$\left[\xi \frac{d^2}{d\xi^2} + (2l+2 - \xi) \frac{d}{d\xi} - (l+1+i\delta) \right] v_L = 0 \quad (39)$$

ううううう!

先程と同様 (= B.9.1 (9) より、原点正則な解は、

$$v_L = F(l+1+i\delta | 2l+2 | \xi) \\ = W_1(l+1+i\delta | 2l+2 | \xi) + W_2(l+1+i\delta | 2l+2 | \xi)$$

$$\begin{aligned} & \sim_{(10),(11)} \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1-i\delta)} (2i\delta r)^{-(l+1)} e^{-i\delta(\log 2kr + \frac{\pi}{2}r)} \\ & \quad + \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1+i\delta)} e^{-2i\delta r} (-2i\delta r)^{-(l+1)} e^{i\delta(\log 2kr - \frac{\pi}{2}r)} \end{aligned}$$

の主要項

よって、(37)の原点正則な解は、

$$y_L = e^{i\delta r} (kr)^{l+1} v_L \\ \sim_{r \rightarrow 0} \frac{(2l+1)!}{|\Gamma(l+1+i\delta)|^2} \frac{e^{\frac{\pi}{2}\delta}}{2^{l+1}} \left[\Gamma(l+1+i\delta) (-i)^{l+1} e^{+i(kr - \delta \log 2kr)} + (c.c.) \right]$$

$$= \frac{(2l+1)!}{|\Gamma(l+1+i\delta)|^2} \frac{e^{\frac{\pi}{2}\delta}}{2^l} \operatorname{Im} \left[\Gamma(l+1+i\delta) (-i)^l e^{+i(kr - \delta \log 2kr)} \right]$$

$$= \frac{(2l+1)!}{|\Gamma(l+1+i\delta)|^2} \frac{e^{\frac{\pi}{2}\delta}}{2^l} \sin \left(kr - \delta \log 2kr - \frac{\pi}{2}l + \sigma_L \right)$$

$$\equiv c, \quad \boxed{\sigma_L = \arg \Gamma(l+1+i\delta)} \quad (40)$$

7-0rの位相のずれ

(37)の正則解を正則7-0r波 $E_L(\delta; kr)$ と定義すると、

$$E_L \sim_{r \rightarrow 0} \sin \left(kr - \delta \log 2kr - \frac{\pi}{2}l + \sigma_L \right) \quad (41)$$

であり、

《正則球面ワ-ロン関数》

$$F_l(\gamma; kr) = \underbrace{C_l(\gamma)}_{\text{規格化}} e^{i\gamma r} (kr)^{l+1} F(l+1+i\gamma | 2l+2 | -2i\gamma r) \quad (42)$$

$$C_l(\gamma) = \frac{2^l e^{-\frac{\pi}{2}\gamma} \Gamma(l+1+i\gamma)}{(2l+1)!} \quad (43)$$

《正則な球面ワ-ロン関数》 (付録 B §5 参照)

出てゆく波 $u_l^{(+)}$, 入ってくる波 $u_l^{(-)}$ の漸近形は,

$$u_l^{(\pm)} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{\pm i(kr - \gamma \log 2kr - \frac{\pi}{2}l)}$$

$$F_l = \text{Im} [e^{i\gamma z} u_l^{(+)}] \quad (44)$$

§10. 波 ψ_c の球面調和関数による展開

$$\S 7 \text{ のワ-ロン波 } \psi_c \equiv e^{i\gamma/2} \Gamma(1+i\gamma) e^{i\gamma z} F(-i\gamma | 1 | iF(r-z)) \quad (45)$$

をルジャンドル多項式で展開すると,

$$\psi_c = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l e^{i\gamma z} F_l(\gamma; kr) P_l(\cos \theta) \quad (46) \quad \star$$

と表せる。 $\gamma \rightarrow 0$ の極限で,

$$\text{平面波 } e^{i\gamma z} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (47)$$

と同じになる。

★ $F(\alpha | b | z)$ の積分表示 (付録 B §1 (6))

$$F(\alpha | b | z) = (1 - e^{-2\pi i \alpha})^{-1} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(b-\alpha)} \int_{\Gamma_0} e^{x-1} (1-t)^{z-1} dt$$

を用いて、積分の中を展開してから積分することで求められる。

(Xシヤ P. 72~73) $y_l \equiv r u_l \propto F_l(\gamma; kr)$ とおくと (37) から予想できる。

(46)は(44)を用いて

$$\psi_c = \frac{1}{2\pi r} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} (u_l^{(-)} - e^{2i\delta_l} u_l^{(+)}) P_l(\cos\theta) \quad (50)$$

と表せる。

次に、有効距離の短い相互作用による7-02.ポテンシャルの変形

7-02.場 $V_c(r)$ に短時間の相互作用 $V(r)$ が付け加えられるときの波動関数を ψ とすると、これは純粋な7-02.波では表せない。

ψ のルジャンドル展開は、

$$\psi = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \chi_l(r) P_l(\cos\theta) \quad (51)$$

と表せる。

ポテンシャル $V(r)$ の位相のずれの方法は、自由波を7-02.波に置き換えること。

$V(r) + V_c(r)$ の場合に拡張される。

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2\gamma k}{r} - \frac{2m}{\hbar^2} V - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_l(r) = 0 \quad (52)$$

$$\downarrow r \rightarrow \infty \quad (V(r) \sim O(1/r^2) \text{ とする})$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2\gamma k}{r} \right] \chi_l(r) = 0 \quad \text{7-02.}$$

$$\text{より、} \chi_l(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} A e^{+i(kr - \gamma \log 2kr)} + B e^{-i(kr - \gamma \log 2kr)} \\ (A' u_l^{(+)} + B' u_l^{(-)})$$

$$\text{正規解は} A_l (u_l^{(-)} - e^{2i\delta_l} u_l^{(+)} - e^{2i\delta_l} u_l^{(+)} - e^{2i\delta_l} u_l^{(-)}) \quad (\text{近づくとする})$$

$\uparrow$ $V_c = 0$ $\uparrow$ $V_c \neq 0$

$$(\psi - \psi_c) \propto u_l^{(+)} \leftarrow \text{出てゆく波}$$

となる(は(50),(51)より $A_l = \frac{1}{2}$ とすればよく、このとき、

$$\begin{aligned}\psi &\sim \frac{1}{2kr} \sum_l (2l+1) i^{l+1} (u_l^{(+)} - e^{2i\delta_l} e^{2i\sigma_l} u_l^{(-)}) P_l(\cos\theta) \\ &= \psi_c - \frac{1}{2kr} \sum_l (2l+1) i^{l+1} e^{2i\sigma_l} (e^{2i\delta_l} - 1) u_l^{(+)} P_l(\cos\theta) \quad (53)\end{aligned}$$

§7と同様, $\psi = \psi_i + \psi_d$ と表せる。

ψ_i は §7と同様, ^{(cf. (26), (30))}

ψ_d は §7の $f_c(\theta)$ を $f(\theta) = f_c(\theta) + f'(\theta)$ ($\Rightarrow$ 置換 $\theta \rightarrow \theta/2$) ^{(cf. (31)-(34))}

$$\psi_d \sim \frac{1}{r} \exp[i(kr - \gamma \log 2kr)] f(\theta)$$

と表せる。

$$r=r_0, \quad f(\theta) = f_c(\theta) + f'(\theta) \quad (55)$$

$$f_c(\theta) = -\frac{\gamma}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} \exp[-i\gamma \log(\sin^2 \frac{\theta}{2}) + 2i\sigma_0] \quad (55a)$$

$$f'(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1) e^{2i\sigma_l} (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos\theta) \quad (55b)$$

§8と同様 (=)

$$\sigma(r_0) = |f(\theta)|^2 \quad (56)$$

とわかるから,

$$\sigma(r_0) = \sigma_c(r_0) + \underbrace{2\operatorname{Re}(f_c^* f)} + |f'(\theta)|^2$$

§10 (39)-(44) は, $u_l^{(\pm)}$ を η -波としてとすると厳密に成り立つ。