

2011年 4月 19日

§ 1.1 放射能

原子番号を Z , 質量数を A とすると 原子核の崩壊は以下のものがある.

- (α 崩壊 : $(Z, A) \rightarrow (Z-2, A-4) + \textcircled{{}_2^4\text{He}}$ - α 線 (離散スペクトル)
- (β 崩壊 : $(Z, A) \rightarrow (Z+1, A) + \bar{\nu}_e + e^-$ - β 線 (連続スペクトル) \Rightarrow 付録 1
- (γ 崩壊 : $(Z, A; \text{excited}) \rightarrow (Z, A; \text{bound}) + \gamma$ (離散スペクトル)

これらの崩壊によって放出される粒子のエネルギーは MeV のオーダー
 (f) 水素原子のイオン化エネルギーは 13.6 eV

離散か連続かは
 出てくる粒子が 1個
 or それ以上で分け
 られる

原子核の崩壊は確率法則に支配されている

1個の原子核が 1秒の間に崩壊する確率を λ とすると (崩壊定数)

$n(t)$ 個の原子核の中で 時刻 $t \sim t+\Delta t$ の間に崩壊する数の平均は $\lambda n(t) \Delta t$ であり $n(t)$ の満たす微分方程式は

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda n \quad (1)$$

$t=0$ での原子核の個数を n_0 とおくと

$$n(t) = n_0 e^{-\lambda t} \quad (2)$$

と解ける.

単位時間あたりに崩壊する原子核の平均数 ($= \lambda n$) : 放射活性

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \quad (A_0 = \lambda n_0) \quad (3)$$

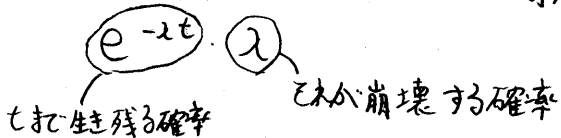
- 単位は
- 1 curie = 3.700×10^{10} [崩壊/s] \Rightarrow 1g の ^{226}Ra の放射活性
 - 1 Bq (ベクレル) = 1 [崩壊/s]

◎ 半減期 : 生き残りの原子核の平均数が元の半分になるまでの時間

$$\frac{n(T)}{n_0} = \frac{1}{2} \quad \text{を解くと} \quad T = \frac{0.6931}{\lambda} \quad (4)$$

◎ 平均寿命

1個の原子核が 時刻 $t \sim t+\Delta t$ の間に崩壊する確率は



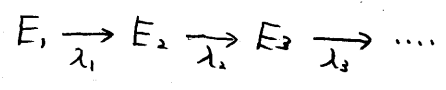
よて、1個の原子核の平均寿命 τ は、

$$\tau = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{0.6931} \quad (5)$$

はじめに原子核が n_0 個あった場合、 τ だけ時間が経つと平均として $\frac{1}{2} n_0$ 個になっている。
 N 個の原子核からなる試料の平均寿命の計算については、おまけ④を参照 (9ページ)

応用

連続した崩壊



において、それぞれ核種の個数が満たす方程式は

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{dt} = -\lambda_1 n_1 \\ \frac{dn_2}{dt} = -\lambda_2 n_2 + \lambda_1 n_1 \\ \frac{dn_3}{dt} = -\lambda_3 n_3 + \lambda_2 n_2 \\ \vdots \end{cases} \quad (6)$$

これらの解は、

$$\begin{cases} n_1 = n_1^0 \exp(-\lambda_1 t) \\ n_2 = n_1^0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \{ \exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t) \} \\ n_3 = n_1^0 \lambda_1 \lambda_2 \left\{ \frac{\exp(-\lambda_1 t)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{\exp(-\lambda_2 t)}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\exp(-\lambda_3 t)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right\} \end{cases} \quad (7)$$

特に、 $\lambda_1 \ll \lambda_i$ で、 $\lambda_i t \gg 1$ のような状況と考えると (ネアツ=ウム系列以外のもの)

$$\frac{n_i}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \quad (8)$$

よ、すべての E_i の存在量は一定になる。 (年代測定に利用)

ある元素が α 崩壊、 β 崩壊を共に起こす場合は、それぞれ崩壊定数を $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ とすると、平均寿命は $\tau = \frac{1}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}$ で与えられる。

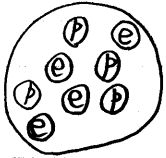
§ 1.2 Rutherford の実験

原子模型

Thomson 模型

(ぶどうパン)

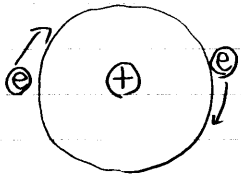
正電荷, 負電荷は原子全体に均等に分布.
遠くから見ると, 原子全体の電荷は打ち消すので, 電場は弱い



↓
α線を散乱させるとほとんども散乱角が小さな方向へ

長岡模型

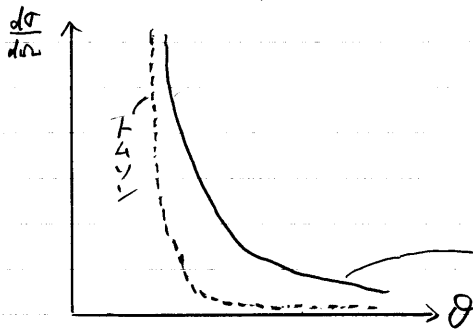
(土星)



中心に位置する点状の正電荷のまわりを負電荷が公転.

↓
中心付近に入射したα線は散乱角が大きい.

2つの散乱角ごとの断面積を比較すると, および下図のようになる



実験結果に良く一致するのは
長岡模型の方だった!

長岡:
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 m^2 v^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (\text{おまけ④参照})$$

α線と原子核の間の距離の最小値は

$$r_{\min} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \right) \quad (\text{これをた おまけ参照})$$

この式から Au ($Z=79$) の核の大きさを見積ってみると, (α線のエネルギーは 5.3 MeV)

$$r_1 \leq \frac{79 \times (1.6 \times 10^{-19})^2 \times 2}{5.3 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 4\pi \times 8.9 \times 10^{-12}} \approx \underline{\underline{4.3 \times 10^{-14} \text{ (m)}}}$$

ホントは α粒子の波動性も考慮する必要がある. (→ § 1.3)

付録 1 β 崩壊の理論 β 崩壊の素過程

$$\begin{cases} n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \\ p \rightarrow n + e^+ + \nu_e \end{cases} \quad \text{これらは互いに逆過程と考える。} \quad (1)$$

(β 線が連続スペクトルであることを説明するために、ニュートリノを仮定 (観測にはかからない))

Fermi の理論 (1934年) (原論文は "Z. Physik. 88, 161" (1934))

 β 崩壊で放出される電子(陽電子)は核の崩壊と"同時に"生成される。

(エネルギー, 運動量, 角運動量が保存される)

Fermi の理論は以下の点を説明することに成功

- ① β 線のエネルギースペクトルの形
- ② β 崩壊核の半減期と崩壊エネルギーの関係
- ③ 崩壊前後の核スピン差と半減期の関係

↓

1950年代後半に改善される(場の量子論?)

陽子 \leftrightarrow 中性子 は アインスピンの違い

$$\tau = \frac{1}{2} \tau_3 \quad \tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{パウリ行列と全く同じ})$$

$$\text{電荷演算子} \quad \hat{q} = e \frac{1 - \tau_3}{2} = e \left(\frac{1}{2} - t_3 \right) \quad (\text{スピンの } z \text{ 成分に対応})$$

$$\begin{cases} \text{中性子状態} : a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & t_3 a = \frac{1}{2} a, & \hat{q} = 0 \\ \text{陽子状態} : b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & t_3 b = -\frac{1}{2} b, & \hat{q} = 1 \end{cases}$$

1核子の波動関数は、空間部分の波動関数とスピン波動関数とアインスピン波動関数の積

$$\begin{cases} \text{陽子} \rightarrow \text{中性子} : \tau^{(+)} \equiv \frac{1}{2} (\tau_x + i\tau_y) & \tau^{(+)} b = a, \tau^{(+)} a = 0 \\ \text{中性子} \rightarrow \text{陽子} : \tau^{(-)} \equiv \frac{1}{2} (\tau_x - i\tau_y) & \tau^{(-)} a = b, \tau^{(-)} b = 0 \end{cases} \quad (\text{昇降演算子と同じ})$$

(原子核) + (電子) + (ニュートリノ) からなる系について

$$H = H_{\text{核}} + H_{\text{電子}} + H_{\nu} + \underbrace{H'}_{\text{相互作用}} \quad (2)$$

$$H_{\text{核}} = H_{\text{核}}(\xi_1, \dots, \xi_A) \quad (3)$$

(空間, スピン, アインスピン)

$$H_{\nu} = \sum_r E_r n_r \quad (4)$$

$$H_b = \sum_p \epsilon_p n_p \quad (5)$$

量子数 n_r の状態にある粒子数

• ニュートリノ : 質量 0 $\Rightarrow \epsilon_p = \pm c p$ (6)
(ほとんどの場合質量を0とする?)

• 電子 : $E_r = \pm \sqrt{c^2 p_r^2 + m^2 c^4}$ (7)
(クォンエネルギーは無視、重い核では無視できない)

相互作用 ハミルトニアン

$$H' = \sum_i \sum_r \sum_p K_{rp}(r_i, \xi_i) \underbrace{c_i^{(\dagger)} a_r^\dagger}_{\substack{\text{中子} \\ \downarrow \\ \text{陽子}}} \underbrace{b_p}_{\text{e生成}} \underbrace{d_p^\dagger}_{\text{p生成}} + \sum_i \sum_r \sum_p K_{rp}^\dagger(r_i, \xi_i) \underbrace{c_i^{(\dagger)}}_{\text{p崩壊}} \underbrace{b_p^\dagger}_{\text{e崩壊}} a_r \quad (8)$$

$K_{rp}(r_i, \xi_i)$ について

第2量子化

一粒子演算子の和として $F = \sum_i f(r_i, p_i, \sigma_i)$ のように表される (粒子間力はなし)
 物理量を $\phi(r, \sigma)$ についての生成・消滅演算子で表すと

$$F = \sum_i f_i \rightarrow \sum_r \sum_p \langle \phi | f | \phi \rangle \underbrace{a_r^\dagger a_p}_{\text{となる}}$$

(粒子についての和 \rightarrow 状態についての和になる) (フェルミオンでは $\{a_r^\dagger, a_p\} = \delta_{rp}$ を満たす 反交換)

このアナロジーから

$$K_{rp}(r_i, \xi_i) = \underbrace{g_{\beta}}_{\text{結合定数}} B(r_i, \xi_i) \{ \psi_r^\dagger(r_i) A \psi_p(r_i) \} \quad (9)$$

$\psi_r(r_i), \psi_p(r_i)$ は Dirac 方程式 (おまけ参照) の解で (平面波)

$$\begin{cases} \psi_r(r_i) = U_r L^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{r}_i\right) \\ \psi_p(r_i) = U_p L^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_p \cdot \mathbf{r}_i\right) \end{cases} \quad (10)$$

↑
スピノール

$$\therefore K_{rp}(r_i, \xi_i) = L^{-3} g_{\beta} B(r_i, \xi_i) U_r^\dagger A U_p \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_r + \mathbf{p}_p) \cdot \mathbf{r}_i\right\} \quad (11)$$

初期状態 i から終状態 $f, r\rho$ への単位時間当たりの遷移確率は

$$dW(i \rightarrow f, r\rho) = \frac{2\pi}{\hbar} \rho_f |\langle f, r\rho | H' | i \rangle|^2 \quad (\text{fermi 黄金律}) \quad (12)$$

単位エネルギー変化当たりの状態数

$$\text{系全体のエネルギーは保存されるので: } W_i = W_f + E_r + E_\rho \quad (13)$$

$$|i\rangle = |\text{核}_i\rangle \otimes |0\rangle \quad (\text{電子, ニュートリノはなし})$$

$$|f\rangle = |\text{核}_i\rangle \otimes |\text{電子, ニュートリノ}\rangle \quad \text{とあり}$$

$$\langle 1_r | a_r^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | b_e | 1_\rho \rangle = 1, \quad \langle 1_r | a_r | 0 \rangle = 0 \quad \text{と (8) より}$$

↑
r状態の粒子が1つ

$$\langle f, r\rho | H' | i \rangle = \int \Phi_f^*(\xi_1, \dots, \xi_A) \sum_i \tau_i^{(-)} k_{r\rho}(\eta_i, \xi_i) \Phi_i(\xi_1, \dots, \xi_A) d\xi_1 \dots d\xi_A \quad (14)$$

① ρ_f の計算

エネルギーが保存されるから位相空間内のある部分へ崩壊するとき、終状態の状態数はその位相空間内の体積に比例する。 $E_f = W_f + E_r + E_\rho$ とし、系が L^3 の箱の中に閉じこめられているとすると

$$\rho_f dE_f = \underbrace{\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3}_{\text{単位体積の状態数}} \underbrace{p_r^2 dp_r d\Omega_r}_{\text{体積}} \times \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \delta_\rho^2 d\delta_\rho d\Omega_\rho \quad (15)$$

$$dE_f = \left(\frac{\partial E_f}{\partial E_\rho}\right)_{E_r} dE_\rho = dE_\rho = c d\delta_\rho$$

$$\text{また (17) より } \frac{dE_r}{dp_r} = \frac{c^2 p_r}{E_r} \quad \therefore p_r^2 dp_r = \frac{1}{c^3} E_r \sqrt{E_r^2 - m^2 c^4} dE_r$$

$$E_{\max} \equiv W_i - W_f = E_r + E_\rho \quad \text{とすると (電子が取り得る最大エネルギー)}$$

$$\delta_\rho = \frac{1}{c} (E_{\max} - E_r)$$

これを (15) に代入すると

$$\rho_f = \left(\frac{L}{2\pi\hbar c}\right)^6 E_r (E_r^2 - m^2 c^4)^{\frac{1}{2}} (E_{\max} - E_r)^2 dE_r d\Omega_r d\Omega_\rho \quad (16)$$

$$E_r \equiv E'_r m c^2, \quad E_{\max} \equiv E'_{\max} m c^2 \quad (17) \quad \text{とすると}$$

$$\rho_f = \frac{L^6 (m c^2)^5}{(2\pi\hbar c)^6} E'_r (E'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (E'_{\max} - E'_r)^2 dE'_r d\Omega_r d\Omega_\rho \quad (18)$$

(2) に (11), (14), (18) を代入すると

$$dW(i \rightarrow f, r\rho) = \frac{(mc^2)^5}{(2\pi)^5 \hbar^7 c^6} g_\rho^2 E' (E'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (E'_{\max} - E')^2 dE' d\Omega_r d\Omega_\rho \\ \times |U_r^\dagger A U_\rho|^2 \cdot |M_{fi}|^2 \quad (19)$$

ただし $M_{fi} \equiv \int \Phi_f^*(\xi_1, \dots, \xi_A) \sum_j \tau_j^{(\pm)} B(\mathbf{r}_j, \xi_j) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_r + \mathbf{p}_\rho) \cdot \mathbf{r}_j\right\} \Phi_i(\xi_1, \dots, \xi_A) d\xi_1 \dots d\xi_A$ (20)

(例) $E_{\max} = 5mc^2$ (2.6 MeV) を考えると

核の半径を R とすると $\frac{p_r R}{\hbar} < 0.1$ あり

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_r + \mathbf{p}_\rho) \cdot \mathbf{r}_j\right\} = 1 - \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_r + \mathbf{p}_\rho) \cdot \mathbf{r}_j + \dots \sim 1 \quad (21)$$

$d\Omega_r d\Omega_\rho$ で積分して、電子、反ニュートリノのスピンの状態の和を取る(23式)
 E' 依存の部分だけを取り出すと

$$\frac{dW(i \rightarrow f)}{dE'} \sim E' (E'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (E_{\max} - E')^2 \quad (24) \Rightarrow \text{(付1-1図)}$$

今は軽い核について考えていて、原子核からのクローン力を無視していたが、重い核ではクローン力が強くなり、 β^- 崩壊では電子は引力のためにエネルギーを失って放出され、 β^+ 崩壊では陽電子は斥力のために加速されて放出される。

平均寿命 τ は崩壊確率の逆数あり

$$\frac{1}{\tau} = \int_1^{E'_{\max}} \frac{dW}{dE'} dE' \simeq \frac{1}{2\pi^3} \frac{(mc^2)^5}{\hbar^7 c^6} g_\rho^2 S(p, \delta) |M_{fi}|^2 F(E'_{\max})$$

← (22) で定義される量

$$F(E'_{\max}) = \int_1^{E'_{\max}} E' (E'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (E'_{\max} - E')^2 dE'$$

↓

① τ は E'_{\max} が増加するにつれて急激に減少 (実験と一致)

② E'_{\max} と τ を測定 $\rightarrow |M_{fi}|^2$ もわかれば結合定数 g_ρ を決定できる
 これには (9) 式の A, B について詳細が必要。

A, B は Lorentz 共変であることを要請すると可能な $K_{r\rho}$ は 付1-1表の5組のみ
 (Pauli, Ann. inst. Henri Poincaré 6, 109 (1936) に書いてるらしい...)

* axial vector \Rightarrow ローレンツ変換に対してベクトルの変換性を示すが、パリティ変換の元で不変な量 (例: 角運動量ベクトル)

* pseudo scalar \Rightarrow 回転, ローレンツ変換の元で不変だが、パリティ変換で符号が逆になる。(極性ベクトルと軸性ベクトルの内積 など)

おまけ ① (12p-2) の (c-2) の核子が光速に比べて十分遅い時.
 $\beta_i \sim 1, \alpha_i \sim 0, (\sigma_s)_i \sim 0$ とおける 式 (14) は

$$\langle f | H' | i \rangle = M_{fi}^{(F)} \{ g_s(u_r, \beta u_p) + g_v(u_r, u_p) \} + M_{fi}^{(GT)} \{ g_T(u_r, \beta u_p) + g_A(u_r, u_p) \} \quad (29)$$

$$M_{fi}^{(F)} \equiv \int \Phi_f^* \sum_i \tau_i^{(-)} \Phi_i d\xi_1 \dots d\xi_A \quad (\text{Fermi 型}) \quad (30)$$

$$M_{fi}^{(GT)} \equiv \int \Phi_f^* \sum_i \tau_i^{(-)} \sigma_i \Phi_i d\xi_1 \dots d\xi_A \quad (\text{Gamov-Teller 型}) \quad (31)$$

② 角運動量について.

電子やニュートリノが原子核から放出される際、軌道角運動量 l を持ち去る確率は $(kr)^2$ 程度である (k は波数), 粒子が MeV 程度のエネルギーを持つ時は $kr \ll 1$ なので $l=0$ が主要になり、電子やニュートリノは軌道角運動量を持ち去らない.

(これは粒子が原子核から衝突パラメータ 0 で放出されることに対応)

電子, ニュートリノのスピンは $\pm \frac{1}{2}$ であり、これを合成すると 0 または 1 となる.

したがって β 崩壊では、原子核のスピンの変化は 0 (singlet) あるいは 1 (triplet) となる.

(29) では、Fermi 型が singlet で、GT 型が triplet と考えられる.

電子と反ニュートリノの相対相関の実験から $g_s = g_T = 0$ で

$$\begin{cases} g_v = (1.403 \pm 0.002) \times 10^{-49} \text{ [erg cm}^3\text{]} \\ \frac{g_A}{g_v} = -1.18 \pm 0.05 \end{cases} \quad (32)$$

が求まっている.

g_v による相互作用の特徴的なエネルギー スケールは

$$\frac{g_v}{(10^{-13})^3 \text{ cm}^3} \simeq 10^2 \text{ eV}$$

と、けたはずみに弱い (電磁相互作用や核力に比べて)

$$\frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{4\pi \epsilon_0 \times 10^{-15} \times 1.6 \times 10^{-11}} \sim 10^8 \text{ (eV)}$$

おまけ ④ 複数原子核から成る試料の平均寿命

§1.1 では、1個の原子核の平均寿命について考えたが、ここでは N 個の原子核から成る試料の平均寿命について考察する。

1個の原子核が時刻 t においても崩壊していない確率は

$$e^{-\frac{t}{\tau}}$$
 (τ : 平均寿命)

よって N 個の原子核が t 秒経った時点ですべて崩壊している確率は、

$$(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})^N \quad (A-1)$$

時刻 $t \sim t + \Delta t$ の間に最後の1個が崩壊してなくなる確率は (1) を微分して

$$N(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})^{N-1} \left(\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (A-2)$$

よって 試料全体としての平均寿命 τ_1 は (2) に t をかけて積分すると

$$\tau_1 = \int_0^{\infty} \frac{Nt}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})^{N-1} dt$$

$$x = \frac{t}{\tau} \text{ とすると}$$

$$\tau_1 = N\tau \int_0^{\infty} x e^{-x} (1 - e^{-x})^{N-1} dx \quad (A-3)$$

$$(1 - e^{-x})^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} {}_{N-1}C_k (-1)^k e^{-kx} \quad \text{よ) (二項展開)}$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= N\tau \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} {}_{N-1}C_k (-1)^k x e^{-(k+1)x} dx \\ &= N\tau \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ {}_{N-1}C_k (-1)^k \frac{1}{(k+1)^2} \right\} \quad (A-4) \end{aligned}$$

$N=10$ 位までと調べると、 τ_1 の振り舞いは、 $\tau_1 \sim \sqrt{N}$ 程度になった...
 N が大きい時 (アボガドロ数程度) の振り舞いはどうなるだろう...

thanks to 筒井, 藤林, 松田, 村上

おまけ (B)

◎ Rutherford の公式

クーロン力のおよな中心力場 $U(r)$ 中を粒子が運動する際は、粒子の運動は、一定の平面内で行われる。よって粒子の位置を極座標 (r, φ) を用いて表す。

粒子の角運動量は

$$L = m r^2 \dot{\varphi} \quad (\text{const}) \quad (B-1)$$

粒子のエネルギーは

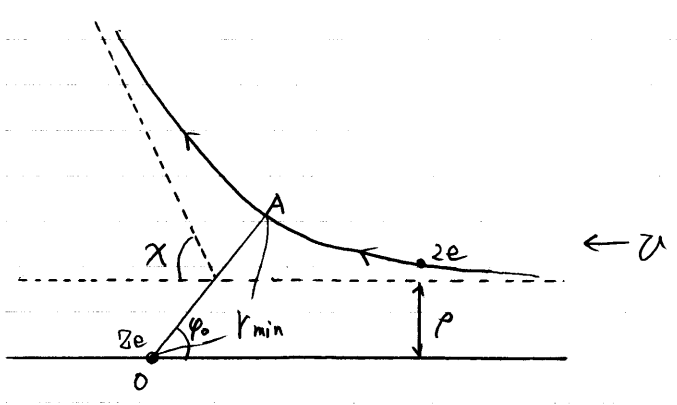
$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m \dot{r}^2}{2} + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{\text{有効ポテンシャル}} + U(r) \quad (B-2)$$

$$\therefore \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(r)) - \frac{L^2}{m^2 r^2}} \quad (B-3)$$

変数分離して積分すると

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(r)) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}}$$
$$d\varphi = \frac{L}{mr^2} dt \quad \text{お)$$

$$\varphi = \frac{\int \frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{L^2}{r^2}}} \quad (B-4)$$



図のような衝突パラメータが ρ の散乱を考える。角運動量の大きさは $L = m v_{\infty} \rho$ で、 $E = \frac{1}{2} m v_{\infty}^2$ 。軌跡は直線 OA に関して対称なので、 $\chi = |\pi - 2\varphi_0|$ をみたら、角度 φ_0 は (4) において、粒子が中心に最も近づいた点と無限遠との間で取った積分

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{L^2}{r^2}}} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{m v_{\infty}^2}}} \quad (B-5)$$

で決定される。

原子番号 Z の原子核 (点粒子として扱う) と、 α 粒子 ($+2e$) のクーロン散乱を考えると

$$U = \frac{2Ze^2}{r} \equiv \frac{\alpha}{r} \quad (\alpha = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}) \quad (B-6)$$

で、これを (5) に代入すると

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{m\tilde{v}^2 r}}} = \dots = \arccos \frac{\frac{\alpha}{m\tilde{v}^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{m\tilde{v}^2 \rho}\right)^2}} \quad (B-7)$$

↑
分母を平方完成して

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{m\tilde{v}^2 \rho^2} = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha^2}{m^2 \tilde{v}^4 \rho^4}} \cos \varphi \right) \text{ の置換をする。}$$

また、 $\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 \tilde{v}^4} \tan^2 \varphi_0 = \frac{\alpha^2}{m^2 \tilde{v}^4} \cot^2 \frac{\chi}{2} \quad (B-8)$

✳ 散乱断面積

単位時間のうちに、 χ と $\chi + d\chi$ の間に散乱される粒子数を dN とおく。
 dN 自体は、入射粒子の密度に比例するので、散乱過程そのものを記述するには不適當である。
 そこで、単位時間あたりに束の横断面の単位面積を通過する粒子数を n とし、比

$d\sigma = \frac{dN}{n}$ を導入する。これを有効散乱断面積という。

(8) お) χ と ρ の関係は互いに一意である。お) 角度 χ と $\chi + d\chi$ の間に散乱されるのは、一定の区間 $\rho(\chi)$ と $\rho(\chi) + d\rho$ の間の衝突パラメータを持つ粒子のみである。
 このお) 粒子の数は半径が ρ で幅が $d\rho$ の円環の面積に n を掛けたものである(下図)

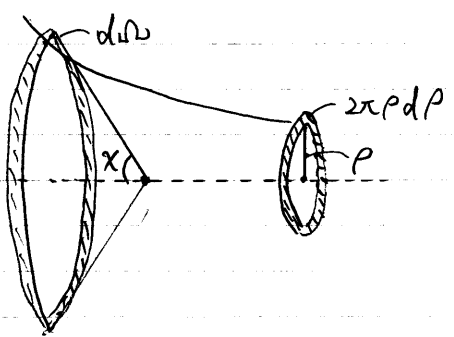
$\therefore dN = 2\pi \rho d\rho$ お)

$d\sigma = \frac{dN}{n} \Rightarrow \pi \rho(\chi) d\rho = 2\pi \rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi \quad (B-9)$

頂角 $\chi \sim \chi + d\chi$ の円錐が囲む微小立体角は $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$ お)

$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\Omega \quad (B-10)$

(8) お)



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2m\tilde{v}^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} = \frac{Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 m^2 \tilde{v}^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} \quad (B-11)$$

(Rutherford の公式)

◎ 近日点を求める

α 粒子が近日点 A にいる時は、有効ポテンシャルがエネルギーに等しくなるので、(7) お)

$1 - \frac{\rho^2}{r_{\min}^2} - \frac{2\alpha}{m\tilde{v}^2 r_{\min}} = 0$ $r_{\min} > 0$ の解は

$$r_{\min} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m\tilde{v}^2} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\chi}{2}} \right) \quad (B-12)$$

おまけ ③ ディラック方程式

相対論的エネルギーの式
$$\frac{E}{c} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2 c^2} \quad (C-1)$$

を次のように p_1, p_2, p_3 の1次式に等しいとおいてみる。

$$\frac{E}{c} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2 c^2} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta m c \quad (C-2)$$

(α_i, β が普通の数ならば、このおなじ変形は不可能だが、以下のように、行列ならば可能)

両辺を2乗すると

$$\begin{aligned} p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2 c^2 &= \alpha_1^2 p_1^2 + \alpha_2^2 p_2^2 + \alpha_3^2 p_3^2 + \beta^2 m^2 c^2 \\ &+ (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1) p_1 p_2 + (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2) p_2 p_3 + (\alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_3) p_3 p_1 \\ &+ (\alpha_1 \beta + \beta \alpha_1) p_1 m c + (\alpha_2 \beta + \beta \alpha_2) p_2 m c + (\alpha_3 \beta + \beta \alpha_3) p_3 m c \end{aligned} \quad (C-3)$$

両辺を比較すると

$$\begin{cases} \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1 \\ \alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, i \neq k) \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (C-4)$$

これを満たす α_i, β の具体形は以下のようになる。(表現方法はいくつかある)

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (C-5)$$

$$\text{また } \gamma_5 \equiv i \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (C-6) \quad (\gamma \text{ の定義は下})$$

(C-2) において

$$p_i \rightarrow -i \hbar \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad E \rightarrow i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{と置きかえると}$$

$$\frac{i \hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} = -i \hbar \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + \beta m c \quad (C-7)$$

これを1粒子の波動関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ に作用させたとして、

$\hbar \equiv \hbar^0, \quad \frac{\partial^i}{\partial x^i} \equiv \partial^i$ とすると

$$i \hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m c \psi = 0 \quad (C-8) \quad \text{を得る (Dirac 方程式)}$$