

## 4. 独立粒子モデル

### § 4.1 Magic Number

- 陽子数, 中性子数が 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 (magic number) のとき, 原子核の結合エネルギーが突然大きくなる (安定になる)
- 陽子数, 中性子数が共に magic number の核を "double magic な核" という

原子の電子配置でも,  $Z=2, 10, 18, 36, \dots$  の希ガス元素で特に安定になる。  
 ↑  
 電子はそれぞれ相互作用せずに, クーロン場中を運動すると仮定すると説明できた。



原子核中の核子同士も相互作用せず, 独立に運動していると仮定すると magic number を説明できるのではなからうか... (by Mayer, Jensen)

以下では殻モデルを用いて, magic number, 原子核の spin について考察する。

### § 4.2 核子の軌道運動 (殻モデル)

magic number を説明するために核子には

- 球対称, 中心力場;
- 強いスピンの軌道力 (LS相互作用) が働いていると仮定

① について

N 核子系の波動関数も Slater 行列式

$$\psi(\xi_1, \dots, \xi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi_1) & \varphi_1(\xi_2) & \dots & \varphi_1(\xi_N) \\ \varphi_2(\xi_1) & \varphi_2(\xi_2) & \dots & \varphi_2(\xi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_N(\xi_1) & \varphi_N(\xi_2) & \dots & \varphi_N(\xi_N) \end{vmatrix} \quad \text{で表し}$$

i 番目の核子に働くポテンシャルは

$$V_i(\xi_i) = \sum_{j \neq i} \int V(\xi_i, \xi_j) |\varphi_j(\xi_j)|^2 d\xi_j$$

と、他の核子からの平均として表す。(Hartree-Fock 近似)

$$\left( \begin{array}{l} \text{(cf) } \gamma\text{-ロン相互作用だと (電子同士の)} \\ V(\xi_i, \xi_j) = \frac{e^2}{|r_i - r_j|} \end{array} \right)$$

② の LS 力について

核子間の場合は、2核子間に働く。テンソル力の平均が起源となっている...

・電子の LS 力について

電子が原子核から受ける電場は  $E = -\nabla\Phi(r)$  ← 中心ポテンシャルこの電子が速度  $v$  で動いているために、電子から見ると、電子の位置に  
磁場  $B = -\frac{v}{c} \times E$  が生じる

この磁場と、電子の磁気モーメント

$$\mu \approx \frac{e}{mc} \mathcal{S} \quad (\mathcal{S}: \text{電子のスピン}) \quad \text{との相互作用エネルギーは}$$

$$\begin{aligned} -\mu \cdot B &= \frac{e\mathcal{S}}{mc} \cdot \left( \frac{v}{c} \times E \right) = -\frac{e\mathcal{S}}{m^2c^2} \cdot (\mathcal{P} \times \nabla\Phi(r)) \\ &= -\frac{e\mathcal{S}}{m^2c^2} \cdot \left( \mathcal{P} \times \frac{r}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} \right) = \frac{e}{m^2c^2} \underbrace{(\mathcal{L} \cdot \mathcal{S})}_{\text{}} \frac{1}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} \end{aligned}$$

$$(\because \mathcal{L} = r \times \mathcal{P})$$

この類推から 1 核子に対する Schrödinger 方程式は

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U(r) - \frac{\kappa}{(Mc)^2} \frac{1}{r} \frac{dU(r)}{dr} (\mathcal{S} \cdot \mathcal{L}) \right\} \phi = E \phi \quad (1)$$

 $\kappa$  は定数、陽子の場合には  $U(r)$  は核力の平均 +  $\gamma$ -ロン力の平均。

①  $\kappa = 0$  として、 $U(r) = \frac{1}{2} M \omega^2 r^2$  (調和振動子) を仮定すると

波動関数を  $\phi = \frac{\chi(r)}{r} Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$  とおくと、動径成分の方程式は

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{M\omega^2}{2} r^2 + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2Mr^2} \right] \chi(r) = E \chi(r)$$

このエネルギー固有値は

$$E = \hbar\omega \left( \frac{3}{2} + \ell + 2(n-1) \right) \quad (n=1, 2, 3, \dots; \ell=0, 1, 2, \dots)$$

② 伊・カワイ I p.164 ~ p.166.

つまり、エネルギー固有値は  $\ell + 2(n-1)$  の値で決まる

1つの  $\ell$  の値に対しては ②  $(2\ell+1)$  個まで、同種の核子を入れることができる。  
核子のスピン

エネルギーの低い順に列挙していくと、

$\ell + 2(n-1)$ の値	$n$ の値	$\ell$ の値	呼び名	縮退度
0	1	0	1s	2
1	1	1	1p	6
2	1	2	1d	10
	2	0	2s	2
				12
3	1	3	1f	14
	2	1	2p	6
				20

よって閉殻になる核子の数は、縮退度を足していくと、2, 8, 20, 40, ... となり、20 より大きい magic number は説明できない

LS力を無視して、ポテンシャルの形を井戸型にしても、

$$\text{Wood-Saxon 型 } U(r) = \frac{V_0}{1 + \exp\left\{\frac{1}{a}(r-R_0)\right\}} \quad (4-4 \text{ 図 (c)})$$

にしても同様に magic number を説明できない。

次に  $\kappa \neq 0$  として、LS相互作用の効果を取り入れる

1核子の全角運動量を

$$\mathbf{j} = \mathbf{\ell} + \mathbf{s} \quad (2) \quad \text{とすると}$$

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{\ell} = \frac{1}{2} (\mathbf{j}^2 - \mathbf{\ell}^2 - \mathbf{s}^2) \quad (\text{スピンの大きさは } \frac{1}{2})$$

よ.7. 固有状態を  $j, l, j_z = m$ , 主量子数  $n$  で label 付けできて.

$$\phi_{n\ell jm} (r, \xi) = R_{n\ell}(r) Y_{j\ell \pm}^m(\theta, \varphi, \xi) \quad (3) \quad \text{とする.}$$

↑  
スピン変数

$j^2$  の固有値が  $\hbar^2 j(j+1)$  等よ.  $S \cdot L$  が  $\phi$  に作用したとき.

$$(S \cdot L) \phi = \frac{\hbar^2}{2} \{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\} \phi$$

スピン  $\frac{1}{2}$  と軌道角運動量の合成は.

$$\begin{cases} l \neq 0 \text{ のとき,} & j = l \pm \frac{1}{2} \\ l = 0 \text{ のとき} & j = \frac{1}{2} \end{cases} \quad - (*)$$

動径関数  $R_{n\ell}(r)$  に対する方程式は.

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_{n\ell}}{dr} \right) + \left\{ U(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2} \right\} R_{n\ell} - \frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{\hbar}{Mc} \right)^2 \left\{ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right\} \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} R_{n\ell} = E_{n\ell} R_{n\ell} \quad (4)$$

$\hbar$  が小さいとして,  $L, S$  による寄与を小さな摂動と扱えば.

$\hbar=0$  でのエネルギー  $\rightarrow$  固有関数を  $E_{n\ell}^0, R_{n\ell}^0$  とすると  
1次近似で.

$$E_{n\ell j} = E_{n\ell}^0 - \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\hbar}{Mc} \right)^2 \left\langle \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right\rangle_{n\ell} \left\{ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right\}$$

$$\left\langle \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right\rangle_{n\ell} \equiv \int_0^\infty R_{n\ell}^{0*} \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} R_{n\ell}^0 r^2 dr \quad (7)$$

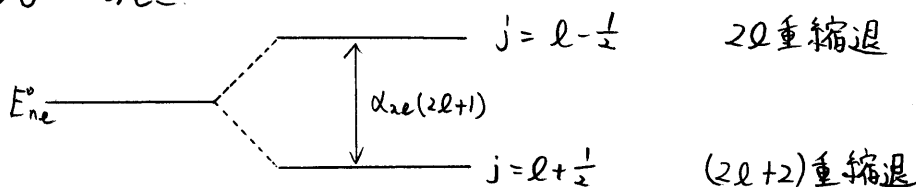
(\*) かつ,  $l \neq 0$  のときは.

$$\begin{cases} j = l + \frac{1}{2} & : E_{n\ell, l+\frac{1}{2}} = E_{n\ell}^0 - \alpha_{n\ell} l \\ j = l - \frac{1}{2} & : E_{n\ell, l-\frac{1}{2}} = E_{n\ell}^0 + \alpha_{n\ell} (l+1) \end{cases} \quad (5)$$

( $l=0$  だと, 1次摂動でのエネルギーのずれはない)

$$\alpha_{n\ell} \equiv \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\hbar}{Mc} \right)^2 \left\langle \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right\rangle_{n\ell} \quad (6)$$

エネルギー準位が2つに分離する

$\alpha > 0$  のとき

これを Wood-Saxon 型 ポテンシャルに適用すると magic number が再現できる! (パラメーターを上手く決めないとイケない?)

◎ 調和振動子型での準位間隔  $\hbar\omega$  を求める

核子が半径  $R = r_0 A^{1/3}$  の球内に閉じ込められていると考えると  
中心からの 2 乗の平均は

$$\langle r^2 \rangle = \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)^{-1} \int_0^R r^2 4\pi r^2 dr = \frac{3}{5} R^2 = \frac{3}{5} r_0^2 A^{2/3} \quad (8)$$

$N = 2 =$  偶数の場合を考える

各エネルギー準位は

$$E_n' = \hbar\omega \left( n' + \frac{3}{2} \right), \quad n' = 0, 1, 2, 3, \dots$$

3次元調和振動子を  $x$  方向,  $y$  方向,  $z$  方向に変数分離して解くと

$$E_n = \hbar\omega \left( n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \quad (n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

よって  $n' = n_x + n_y + n_z$  より 各  $n'$  に対する縮退度は

$$n'+2 C_2 = \frac{(n'+1)(n'+2)}{2}$$

← 陽子 or 中性子, スピン

$n' = 0$  から  $n' = N$  までに 4 核子ずつ入れると

$$A = 2 \sum_{n'=0}^N (n'+1)(n'+2)$$

全エネルギーは

$$W = 4\hbar\omega \sum_{n'=0}^N \frac{1}{2} (n'+1)(n'+2) \left( n' + \frac{3}{2} \right)$$

核子数が多くて、 $N+2 \gg 1$  のとき  
和は  $n'$  の大きいところしか寄与しないので

$$A \simeq 2 \sum_{n'=0}^N (n'+2)^2 \simeq \frac{1}{3} (N+2)(N+2+1) \{2(N+2)+1\}$$

$$\simeq \frac{2}{3} (N+2)^3$$

$$W \simeq 2\hbar\omega \sum_{n'=0}^N (n'+2)^3 \simeq 2\hbar\omega \left\{ \frac{(N+2)(N+2+1)}{2} \right\}^2 \simeq \frac{\hbar\omega}{2} (N+2)^4$$

と近似できるので

$$W \simeq \frac{5}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{3}} \hbar\omega A^{\frac{4}{3}} \quad (9)$$

調和振動子の平均エネルギーは

$$\langle \text{運動エネルギー} \rangle = \langle \text{ポテンシャルエネルギー} \rangle \quad (7)$$

$$W = 2 \left\langle \sum_{i=1}^A \frac{1}{2} M\omega^2 r_i^2 \right\rangle = M\omega^2 A \langle r^2 \rangle \quad (10)$$

(8)~(10)より

$$\hbar\omega \simeq \frac{5}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar^2}{Mr_0^2} A^{-\frac{1}{3}} = 41 A^{-\frac{1}{3}} \text{ (MeV)} \quad (11)$$

### § 4.3 原子核のスピン

原子核の基底状態のスピンを殻モデルで説明することを試みる。

・核子群が閉殻を作るときは、合成角運動量は0。

☺ 1つの単位  $(n, l, j)$  には、 $m = -j, -j+1, \dots, j$  の  $(2j+1)$  個の状態が縮退している。閉殻はこの全てを占有するので

合成角運動量のz成分は  $-j + (-j+1) + \dots + j = 0$  と

常に0になっているため、全角運動量は0。

・閉殻構造の上の殻に“はんぱ有”核子が入るとき

角運動量合成則から考えると、複数の角運動量状態を取り得るが

(ex: 1f<sub>7/2</sub>に2個入るとき、6, 4, 2, 0が取り得る)

どれが基底状態かわからない。



magic numberの説明で用いたハミルトニアンだけでは不十分

今までのハミルトニアンに摂動として、残留力を加えて、この効果として、  
 複数の角運動量状態の縮退が溶けて、基底状態が定まると考える。  
 新しいハミルトニアンを

$$H = H_0 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j V_{res}(i, j) \quad (1)'$$

(1)式 of ハミルトニアン      残留力

残留力を摂動として扱えるのは、核の低エネルギー現象について。

原子核の結合エネルギーの計算や、高エネルギー現象については、  
 本来の正しいハミルトニアン

$$H = \sum_i \left( -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j V(i, j) \quad (2)$$

核力ポテンシャル

に戻って議論しなければならぬ。(第6章参照)

$(n, l, j)$  準位に中性子が  $\nu$  個入っているとす。 ( $\nu < 2j+1$ )  
 この殻の合成角運動量を  $(J, M)$ 、波動関数を  $\Phi_{neJM}^{(\nu)}$  とすると  
 1次摂動でのエネルギーは

$$W_{neJM}^{(\nu)} = \nu E_{neJ} + \langle \Phi_{neJM}^{(\nu)} | H' | \Phi_{neJM}^{(\nu)} \rangle \quad (5)$$

残留力ポテンシャルを近距離力の極端な形として

$$V_{res}(i, j) = -\delta \delta(|r_i - r_j|), \quad \delta > 0 \quad (6)$$

と仮定する。

基底状態の角運動量とエネルギーの関係は、

・  $\nu =$  偶数のとき

$$J=0, \quad \langle \Phi_{neJM}^{(\nu)} | H' | \Phi_{neJM}^{(\nu)} \rangle = -\frac{\nu}{2} (2j+1) I_{ne} \quad (7)$$

・  $\nu =$  奇数のとき

$$J=j, \quad \langle \Phi_{neJM}^{(\nu)} | H' | \Phi_{neJM}^{(\nu)} \rangle = -\frac{\nu-1}{2} (2j+1) I_{ne} \quad (8)$$

ただし、
$$I_{ne} = \frac{\delta}{3\pi} \int_0^\infty R_{ne}^4 r^2 dr \quad (9)$$

$(\lambda, \ell, j)$  準位に 1種類 の核子が詰っていくときは, 2個ずつが合成角運動量が 0 になるように pair を組んで,  $(2j+1)I_{ne}$  だけ結合エネルギーとして得る.

$\ell$  が奇数だと, ホッチの核子がその準位の角運動量  $j$  を持つ.

実験におと, 偶-偶核の核スピンは “常に例外なしに” 0 である.

- 2つのエネルギー準位が密接していて, 上の準位の方が  $j$  が大きいときは, 下から核子が順に詰っていくのではなく,  $j$  の大きい所に詰めて pair を組ませて pairing energy を増やす方が全体としてエネルギーが下がること.

例)  ${}_{82}^{209}\text{Pb}_{125}$  (4-7図)



スピンを測定することで, 1つの群れの中の個々の準位の上下関係を特定できる.

- 核子数が多くなってくると, 中性子, 陽子の平均ポテンシャルは同一視できなくなり, 準位の並び方が変ってくる.